

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Diplomová práce

BRNO 2026

Bc. ANETA FARDOVÁ

MASARYKOVA
UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Teselace

Diplomová práce

Bc. Aneta Fardová

Vedoucí práce: RNDr. Jan Vondra, Ph.D. Brno 2026

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Aneta Fardová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Teselace
Studijní program:	Učitelství matematiky pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství matematiky pro střední školy, Učitelství deskriptivní geometrie pro střední školy, Učitelství anglického jazyka a literatury pro střední školy
Vedoucí práce:	RNDr. Jan Vondra, Ph.D.
Akademický rok:	2025/2026
Počet stran:	xi + 91
Klíčová slova:	Teselace; Souměrnost; Posunutí; Otočení; Escherovská teselace; Mnohouhelník; Kachle; Vertex; Modifikace; 3D tisk; Model

Bibliographic Entry

Author:	Bc. Aneta Fardová Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Tessellation
Degree Programme:	Teaching of Mathematics for Secondary Schools
Field of Study:	Teaching of Mathematics for Secondary Schools, Teaching of Technical Drawing for Secondary Schools, Upper Secondary School Teacher Education in English Language and Literature
Supervisor:	RNDr. Jan Vondra, Ph.D.
Academic Year:	2025/2026
Number of Pages:	xi + 91
Keywords:	Tessellation; Symmetry; Translation; Rotation; Escher tessellation; Polygon; Tile; Vertex; Modification; 3D printing; Model

Abstrakt

Tato diplomová práce se věnuje propojení teselací s výukou na střední škole. Představuje historické pozadí teselací a základní pojmy pojící se s teselacemi. Práce dále nabízí konkrétní řešené aktivity do hodin matematiky, využívající teselace pro procvičení nej-různějších odvětví matematiky. Teselace lze však využít i mimo matematiku, proto práce zahrnuje i mezipředmětové aktivity propojující teselace, resp. matematiku, s výtvarnou výchovou, biologií a informatikou, konkrétně 3D tiskem. Součástí práce je příloha obsahující připravená zadání úloh k přímému využití ve výuce matematiky a další podpůrné materiály pro realizaci mezipředmětových aktivit.

Abstract

This thesis explores the integration of tessellations into secondary school education. It presents the historical background of tessellations and introduces the fundamental concepts associated with them. The thesis further offers specific classroom activities for mathematics lessons that use tessellations to practice various areas of mathematics. However, tessellations can also be applied beyond mathematics; therefore, the thesis includes interdisciplinary activities connecting mathematics with art education, biology, and computer science, specifically 3D printing. The thesis also contains an appendix with ready-to-use task assignments for mathematics lessons, as well as additional supporting materials for the implementation of interdisciplinary activities.

ZADÁNÍ
DIPLOMOVÉ PRÁCE

Akademický rok: 2025/2026

Ústav:	Přírodovědecká fakulta
Studentka:	Bc. Aneta Fardová
Program:	Učitelství matematiky pro střední školy
Specializace:	Učitelství deskriptivní geometrie pro střední školy Učitelství matematiky pro střední školy Učitelství anglického jazyka a literatury pro střední školy

Ředitel ústavu PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje diplomovou práci s názvem:

Název práce:	Teselace
Název práce anglicky:	Tessellation
Jazyk práce:	čeština

Oficiální zadání:

Napište srozumitelný středoškolský text o teselacích v rovině i prostoru. Navrhněte využití teselací ve výuce nejen matematiky (mezipředmětové aktivity, podpory prostorové představivosti). Uvažujte o vhodných pomůckách s využitím např. 3D tisku (stručný popis tvorby modelů bude součástí práce).

Literatura:

FATHAUER, Robert. *Tessellations : mathematics, art, and recreation*. First edition. Boca Raton: CRC Press, 2021, xiii, 450. ISBN 9780367185978.

- KUPČÁKOVÁ, Marie. Geometrie ve světě dětí i dospělých. Vyd. 2. Hradec Králové: Gaudeamus, 2005. ISBN 80-7041-295-X.
- SEYMOUR, Dale a BRITTON, Jill. Introduction to tessellations. Palo Alto: Dale Seymour Publications, 1989. ISBN 0-86651-461-9.

Vedoucí práce:	RNDr. Jan Vondra, Ph.D.
Datum zadání práce:	16. 9. 2024
V Brně dne:	11. 4. 2026

Zadání bylo schváleno prostřednictvím IS MU.

Bc. Aneta Fardová, 21. 10. 2024

RNDr. Jan Vondra, Ph.D., 22. 10. 2024

RNDr. Jan Vondra, Ph.D., 25. 10. 2024

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala v první řadě vedoucímu mé diplomové práce, kterým je RNDr. Jan Vondra, Ph.D., za cenné rady, podporu a trpělivou spolupráci během psaní této práce i během celého studia. Můj dík patří i všem vyučujícím, díky kterým jsem byla kompetentní k tvorbě této práce. Dále všem odborníkům, kteří se mnou ochotně konzultovali mezipředmětové aktivity, těmi jsou Mgr. Michal Hlosta, Bc. Adéla Pětivlasová a Bc. Kateřina Brodová. Autentický pohled na věc očima středoškoláka poskytovala moje sestra Nela, které taktéž patří můj dík, stejně jako mé sestře Lucii, která mi byla k ruce, co se jazykových i všech ostatních potíží týče. Dále bych na tomto místě chtěla poděkovat rodině a blízkým přátelům, díky kterým byla má studijní léta nejen snesitelná, ale staly se z nich díky nim roky, na které budu vždy ráda vzpomínat. Děkuji rodičům za všechnu podporu, které se mi od nich během studia dostávalo a v neposlední řadě děkuji Martinovi za to, že nejen během psaní této práce tu je vždy pro mě.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 26. dubna 2026

.....
Bc. Aneta Fardová

Obsah

Seznam obrázků	xi
Úvod	1
Kapitola 1. Historie rovinných teselací	3
1.1 Rané geometrické teselace ve starověkých civilizacích	3
1.2 Islámské vlivy	5
1.3 Renesance	7
1.4 Maurits Cornelis Escher	7
1.5 Moderní matematická teorie teselací	8
1.6 Teselace v současnosti	9
Kapitola 2. Základní pojmy	11
2.1 Teselace	11
2.2 Rovinná teselace	11
2.2.1 Dlaždice	11
2.2.2 Vertexy	12
2.2.3 Typy rovinných teselací	13
2.2.4 Útvary schopné teselace	17
2.3 Teselace prostoru	19
2.4 Další teselace	19
2.5 Typy symetrických rovinových grup	20
2.6 Pásové grupy symetrie	24
Kapitola 3. Tvorba rovinných periodických teselací	25
3.1 Techniky generování teselací	25
3.2 Modifikace základní dlaždice	28
3.2.1 Modifikace pomocí posunutí	28
3.2.2 Modifikace pomocí otočení	29
3.3 Typy pro tvorbu escherovských teselací	29
3.4 Další taktiky generování teselací a tvorby escherovských teselací	33
Kapitola 4. Souvislost s RVP	35
4.1 Teselace v RVP pro gymnázia	35
4.2 Teselace v RVP pro obor vzdělávání Stavebnictví	36

4.3 Konkluze	36
Kapitola 5. Aktivita do hodin matematiky	37
5.1 Důkazová úloha – Existují 3 pravidelné teselace	37
5.2 Které mnohoúhelníky teselují a proč	39
5.3 Popis symetrií v teselacích	43
5.4 Popis teselací pomocí vektorů	47
5.5 Posloupnosti – Po kolika dlaždice přibývají	48
5.6 Kombinatorika – Typy vertexů	50
Kapitola 6. Mezipředmětové aktivity	53
6.1 Výtvarná výchova	53
6.1.1 Tvorba ozdobného pásu kachlí	53
6.1.2 Tvorba escherovských teselací	55
6.1.3 Islámské ornamenty	56
6.2 Biologie	58
6.2.1 Teselace ve tkáních	58
6.2.2 Včelí plástve – Proč právě šestiúhelník	62
6.3 Informatika	64
6.3.1 Tvorba rovinné teselace	64
6.3.2 Modelování prostorové teselace 1 – Hlavlami	68
6.3.3 Modelování prostorové teselace 2 – Prostorová escherovská teselace ..	70
Závěr	75
Přílohy	76
Které mnohoúhelníky teselují a proč – Rekonstrukce	77
Popis symetrií v teselacích	78
Popis teselací pomocí vektorů	80
Posloupnosti – Po kolika dlaždice přibývají	81
Kombinatorika – Typy vertexů	82
Sítě pro tvorbu teselace	83
Protokol	84
Seznam použité literatury	87
Seznam zdrojů obrázků	89

Seznam obrázků

1.1	Mozaika z Mezopotámie, dnes v Národním muzeu v Berlíně [1]	4
1.2	Pravidelné teselace	4
1.3	Římská mozaika v Alexandrii [2]	5
1.4	Marocká mozaika [3]	6
1.5	Interiér paláce Alhambra [4]	6
1.6	Fasáda Santa Maria Novella navržena L. B. Albertim [5]	7
1.7	Escherovy ještěrky [6]	8
1.8	Ponroseova teselace [7]	9
1.9	Einstein tile [8]	10
1.10	Vampire einstein tile [9]	10
2.1	Ukázka útvarů, které nejsou dlaždicemi; (A) dva útvary dotýkající se v bodě; (B) útvar „s dírou“; (C) sjednocení dvou samostatných útvarů	12
2.2	Ukázka dlaždice	12
2.3	Ukázka vertexů; bod A je vertex stupně 4; bod B je vertex stupně 3	13
2.4	Teselace typu strana ke straně (dvě vlevo) a teselace, kde se strany neshodují (dvě vpravo)	13
2.5	Tři pravidelné teselace	14
2.6	21 typů vertexů, kde číslice uvnitř částí pravidelných mnohoúhelníků značí o kolikaúhelník se jedná	15
2.7	Konvexní a nekonvexní deltoid	16
2.8	První a druhá stelace osmiúhelníku	16
2.9	Konstrukce duální teselace (vyznačena černě vpravo) k již existující teselaci (dvoubarevná teselace „v pozadí“ konstrukce)	17
2.10	Ukázka jak jak je obecný trojúhelník schopen teselace	18
2.11	Ukázka jak je obecný čtyřúhelník schopen teselace	18
2.12	Ukázka teselace prostoru	19
2.13	Ukázka čtvercování čtverce	20
2.14	Demonstrace posunutého zrcadlení	21
2.15	Ukázky všech typů symetrických rovinných grup [10]	23
2.16	Ukázka pásových grup symetrie [11]	24
3.1	Ukázka generování nové teselace pomocí již existující teselace: V horní části rozdělením dlaždic úhlopříčkami a ve spodní části ještě navíc i spojnicemi průsečíků úhlopříček dlaždic	26
3.2	Ukázka generování nové teselace pomocí sítě bodů, do které je teselace vepisována	27

3.3	Ukázka generování nové teselace pomocí překládání teselací (konkrétně přeložení teselace její posunutou zrcadlenou verzí)	27
3.4	Ukázka generování nové teselace pomocí modifikace - tvorba nové základní dlaždice	28
3.5	Ukázka generování nových teselujících útvarů posunutím	28
3.6	Ukázka generování nových teselujících útvarů otočením	29
3.7	Teselace bez motivu na kachlích	30
3.8	Teselace s motivem na kachlích	30
3.9	Teselace, kde orientace kachlí nedává smysl vzhledem k přirozenosti daného zvířete	31
3.10	Teselace, kde motiv kachle napravil nesmyslnou orientaci	31
3.11	Kachle teselace, kde se zvířata dívají na různé strany	32
3.12	Popis vzniku teselace na obrázcích 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11	32
3.13	Rozetová escherovská teselace [12]	33
3.14	Fraktálová escherovská teselace [13]	33
3.15	Teselace sítí platónských těles [14]	34
5.1	Odvození vzorce pro vnitřní úhel pravidelného n-úhelníku	38
5.2	Možná dvojice kachlí do koupelny	42
5.3	Teselace a.	44
5.4	Teselace b.	44
5.5	Teselace c.	45
5.6	Řešení – teselace a.	45
5.7	Řešení – teselace b.	46
5.8	Řešení – teselace c.	46
5.9	Prototypy	47
5.10	Prototypy s vyznačenými vektory	48
5.11	Demonstrační obrázek k úloze o posloupnostech	49
5.12	Vizuální podpora řešení úlohy o posloupnostech	49
6.1	Ukázka Gaudiho užití mozaiky [15]	54
6.2	Tvorba ozdobného pásu v pomocné síti	54
6.3	Ukázka ozdobného pásu	55
6.4	Ukázka vytvořené escherovské teselace	56
6.5	Ukázka islámské mozaiky situované kružnicově [16]	57
6.6	Ukázka vytvořené islámské teselace	57
6.7	Buňky jaterní tkáně pod mikroskopem [17]	58
6.8	Epidermis cibule pod mikroskopem [18]	58
6.9	Nákres pozorovaných buněk	60
6.10	Návrh kachle připomínající epidermickou buňku cibule	60
6.11	Náčrt teselace připomínající epidermis cibule	61
6.12	Obkreslení vampire einstein v programu Inkscape	65
6.13	Kontrola přesnosti návrhu kachle	66
6.14	Připravený tvar vampire einstein v programu Inkscape	66
6.15	Kachle připravená pro 3D tisk ve webové aplikaci Tinkercad	67
6.16	Vytisklá část teselace (vampire einstein)	67

6.17 1. fáze tvorby hlavolamu	68
6.18 1. fáze tvorby hlavolamu – kontrola	69
6.19 Vytvořený hlavolam – Tinkercad	69
6.20 Vytvořený hlavolam	69
6.21 Escherovská prostorová teselace – boky krav	71
6.22 Escherovská prostorová teselace – těla krav	71
6.23 Escherovská prostorová teselace – rozložená kráva	72
6.24 Escherovská prostorová teselace – krávy pro tisk	72
6.25 Escherovská prostorová teselace – vzorované krávy	73
6.26 Escherovská prostorová teselace – tisk krav na pětiflamentové 3D tiskárně	73
6.27 Escherovská prostorová teselace	74

Úvod

Teselace možná není pro většinu žáků na střední škole známý pojem, přesto však jim jsou teselace dobře známé, setkávají se s nimi každodenně, ať už na chodníku cestou do školy nebo při nejrůznější zábavě jako je např. puzzle nebo hlavolamy. Proto jsem se v rámci mé diplomové práce rozhodla navrhnout, jak tento známý koncept přenést do středoškolské výuky.

Ačkoliv se teselace na první pohled nezdají jako téma relevantní pro výuku na střední škole, věnovala jsem se tématu jakožto nástroji, který je možné využít při výuce běžných středoškolských témat pro zpestření, motivaci a rozšíření vědomostí.

V práci se věnuji detailnějšímu představení teselací. Úvodem historickému pozadí teselací, které je představeno čtenáři jako kulturní obohacení, inspirace a motivace pro následnou práci s teselacemi.

Druhá kapitola se věnuje základním pojmům a vlastnostem, má sloužit jako přehled toho, co na teselacích můžeme zkoumat, z čehož vyplývají další části práce. Zároveň je možné na druhou kapitolu pohlížet jako na spis vědomostí, které by měl, alespoň částečně, ovládat učitel, který se rozhodne teselace do své výuky zakomponovat. Dále může kapitola sloužit jako možná osnova pro výuku o teselacích, kterou může být vhodné před představením aktivit s teselacemi žákům krátce přestavit. Ačkoliv se může tato kapitola zdát příliš odborná, je stále psána v duchu toho, že čtenářem může být i nadšený středoškolák či učitel jiného předmětu než je matematika. U náročnějších částí je čtenář vždy upozorněn, že se jedná o jakýsi přesah práce, který není pro následné čtení práce zásadní.

Třetí kapitola poskytuje čtenáři návod na to, jak se teselace tvoří a bude se následně využívat v mezipředmětových aktivitách, kterým se věnuje poslední a hlavní část práce.

Dále jsou představeny možnosti zužitkování teselací v rámci výuky matematiky (jako součást planimetrie, kombinatoriky a dalších oblastí) i dalších předmětů jako je informatika (v rámci modelování) nebo výtvarná výchova (Escherovské teselace tvořeny tvary připomínajícími přírodní motivy). Všechny aktivity jsou koncipovány pro žáky střední školy, mnohdy i ve více úrovních složitosti.

Každá z aktivit je v práci vzorově vyřešena i s komentářem a její zadání vhodné do výuky je k nalezení v příloze. Dále je poskytnut návrh, kdy a jak by se dala aktivita využít na střední škole na základě RVP a středoškolských učebnic. Vzhledem k rozmanitosti aktivit není možné jednoznačně říci, jaké jsou nutné znalosti pro jejich zvládnutí a pro pochopení celé práce. Tento předpoklad si může čtenář odvodit pro jednotlivé úlohy z komentáře poskytnutého pro každou úlohu.

Cílem práce je rozšířit povědomí o teselacích na střední škole a poskytnout inspiraci středoškolským učitelům, jak zpestřit hodiny a přinést do výuky něco, co žáci běžně vídají, ale málo koho napadne za tím hledat matematiku.

Práce je vysázená systémem $\text{\LaTeX}$. Zdroje převzatých obrázků jsou k nalezení v Seznamu zdrojů obrázků a u každého z těchto obrázků se nachází odkaz na jeho zdroj. Obrázky v práci u nichž není uveden zdroj jsou vlastnoručně tvořené za využití softwaru Geogebra a Geogebra 3D. Dalšími využívanými aplikacemi jsou Poznámky+ (pro náčrtky rukou), Adobe Fresco (řešení aktivit do Vv), Inkscape (pro tvorbu vektorových obrázků), Tinkercad (pro tvorbu 3D modelů), PrusaSlicer (pro 3D tisk). Dále jsou v práci použity vlastní snímky obrazovky v rámci popisu řešení úloh a fotografie mých vlastních výtvorů. Informace obsažené v prvních třech kapitolách práce jsou přehledem z více zdrojů, které může čtenář najít v seznamu literatury, kde hlavními zdroji jsou [1] a [2], není-li v dané kapitole řečeno jinak.

Kapitola 1

Historie rovinných teselací

Tato kapitola pojednává o roli teselací v historii, shrnuje historický vývoj zkoumání teselací a ukazuje klíčové momenty v historii.

Slovo teselace vzniklo z latinského slova *tesella*, což bylo označení drobného kamenného čtverce nebo kachličky, kterou užívali Římané při tvorbě mozaik, nebo *tesselatus* (mozaika, složený z kostiček). Tyto latiské pojmy jsou odvozeny z řeckého *tessares* (označující čtvercový tvar). Slovo teselace tak označuje pokrytí roviny geometrickými útvary, a to bez překrývání a bez mezer. Za teselaci je možné považovat téměř jakýkoli vzor. Tyto vzory nás každý den obklopují ať už na podlahách chodeb, oblečení nebo na zdech či střechách. V dnešním světě můžeme jako teselaci roviny chápat např. puzzle nebo vykachličkovanou podlahu. Kromě rovinných teselací se můžeme setkat i s teselací prostoru, což si můžeme představit např. jako lego (kdyby nebyly kostky duté) nebo buňky v rostlinné tkáni.

První empirické příklady teselací se objevují již ve starověkých civilizacích, nicméně teprve novověk přinesl jejich systematické matematické zkoumání. Proto se i tato práce bude zabývat vývojem teselací chronologicky.

1.1 Rané geometrické teselace ve starověkých civilizacích

Mezopotámie a Egypt

Archeologické nálezy z oblasti Mezopotámie (kolem roku 4000 př. n. l.) ukazují hliněné dlaždice tvaru pravoúhlých trojúhelníků a čtverců, které byly vkládány do zdí chrámů pro vytvoření pestrých vzorů. Tyto vzory sloužily především estetickým a symbolickým účelům, i tak představují první známý doklad práce s pokrytím roviny opakujícími se geometrickými tvary.

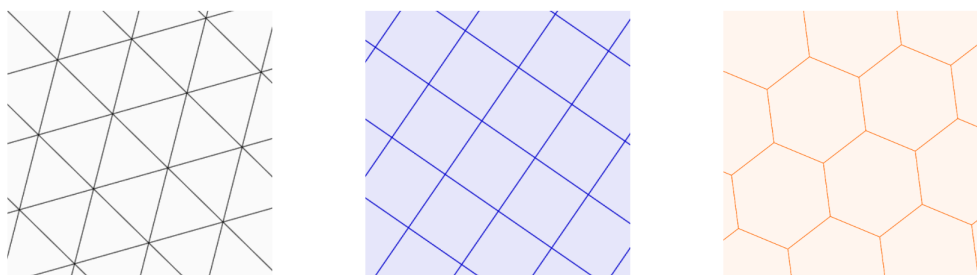


Obrázek 1.1: Mozaika z Mezopotámie, dnes v Národním muzeu v Berlíně [1]

Egyptské chrámové a pohřební architektuře dominovaly pravidelné vzory s náboženskou symbolikou. Objevují se i motivy podobné včelím plástvím, které později sehrály významnou roli v matematice.

Řecko a geometrická teorie

Ve starověkém Řecku přinesla mnoho objevů Pythagorejská škola. Mimo jiné se zabývali otázkou, které pravidelné mnohoúhelníky mohou pokrýt rovinu a proč. Ukázalo se, že pouze rovnostranné trojúhelníky, čtverce a pravidelné šestiúhelníky (viz obr. 1.2). V řeči dnešní teorie teselací, u vertexu se musí setkávat takové kachle, jejichž součet vnitřních úhlů u vrcholů setkávajících se ve vertexu je 360° (viz obr. 2.2.2). To jsme schopni za využití shodných pravidelných útvarů zajistit jen u rovnostranného trojúhelníku ($6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$), obdobně u čtverce a pravidelného šestiúhelníku.



Obrázek 1.2: Pravidelné teselace

Řekové také definovali pojem symetrie a symetrické transformace, což je klíčový koncept v teorii teselací dodnes. V řeckých mozaikách se kromě pravidelnosti a symetrie často užíval i zlatý řez a další principy eukleidovské geometrie.

Řím a technika mozaiky

Římané nejen, že převzali poznatky Řeků, ale do velké míry rozvinuli umění mozaiky. Používali mozaiky k výzdobě nejen veřejných budov a vil, ale i pro praktické účely (např. dlažby). Kombinovali jednoduché geometrické tvary do složitých geometrických kompozic (viz obr. 1.3)

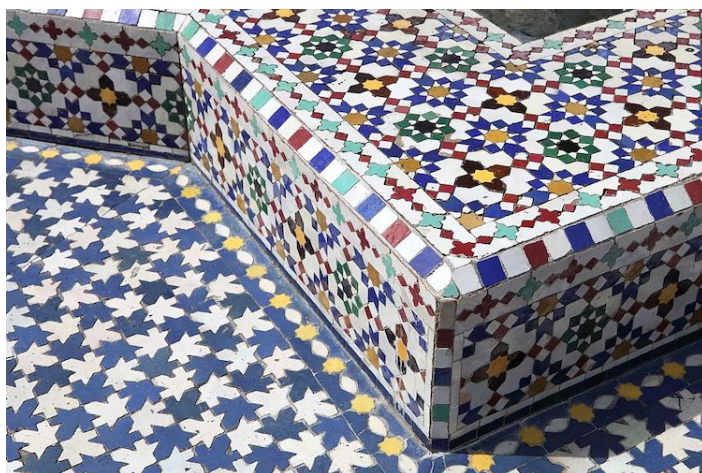


Obrázek 1.3: Římská mozaika v Alexandrii [2]

Také se zde poprvé objevují tzv. poloprávidelné teselace (někdy též semiregulární, viz 2.2.3).

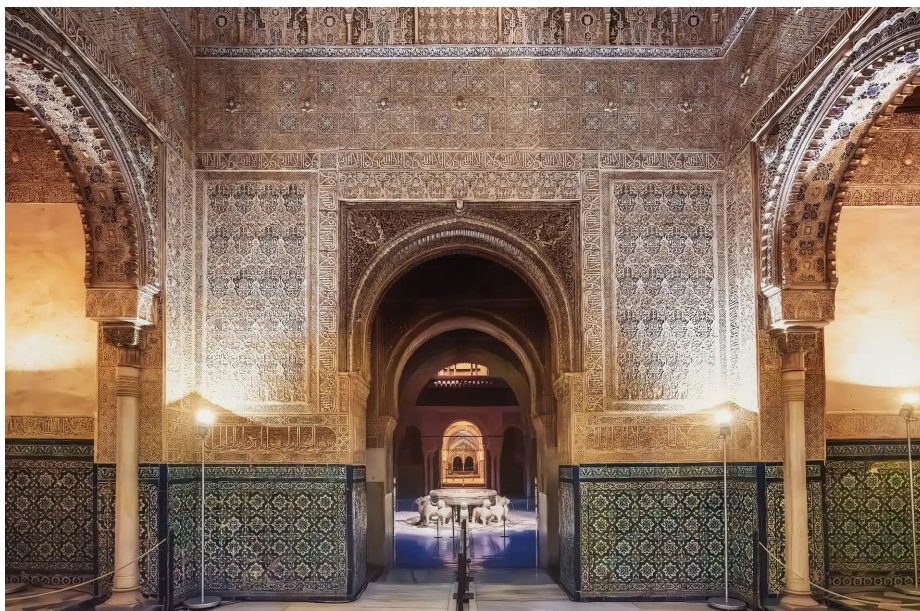
1.2 Islámské vlivy

Islámské umění bylo do velké míry ovlivněno zákazem vyobrazování živých bytostí, proto se zaměřovalo více na abstraktní motivy, kaligrafii, rostlinné motivy a především geometrické vzory. Umělci běžně využívali zásad eukleidovské geometrie a inovovali vzory za užití zrcadlení, otočení a posunutí. Stěny mešit, paláců a madras (škol) byly pokrývány mozaikami a dlažbami s opakujícími se vzory, které obsahovaly hvězdice (velmi typické pro islámské vzory), mnohoúhelníky i neperiodické vzory. Islámský způsob kachličkování se jmenuje *zillij*, ukázky tohoto umění je možné najít téměř ve všech větších islámských městech, na obrázku 1.4 můžeme vidět typickou islámskou mozaiku s hvězdicemi. [3], [4]



Obrázek 1.4: Marocká mozaika [3]

Jedním z nejvýznamnějších příkladů islámských teselací se nachází v paláci Alhambra v Granadě (obr. 1.5), který byl postaven během 13.–14. století jakožto královská rezidence. V paláci je téměř dvacet různých typů periodických teselací, z nichž některé využívají všech sedmnácti typů symetrických rovinových grup (viz 2.5). Tato klasifikace byla formálně popsána až v moderní matematice, ale islámské umění klasifikaci do velké míry předpovědělo.



Obrázek 1.5: Interiér paláce Alhambra [4]

1.3 Renesance

V období renesance se opět objevil zájem o geometrii a symetrii, tentokrát zejména v rámci perspektivního kreslení a ornamentů. Architekti jako Filippo Brunelleschi (1377 – 1445), který se proslavil zejména návrhem kopule florentské katedrály Santa Maria del Fiore a rozvinutím lineární perspektivy v obrazech, nebo Leon Battista Alberti (1404 – 1472), autor prvního díla teoreticky pojednávajícího o architektuře od dob Vitruvia (1. stol. př. n. l., římský architekt, inženýr a teoretik). Oba studovali struktury, které bychom dnes označili jako teselace. Geometrie, především symetrie a pravidelnost, se stala prostředkem pro vyjádření harmonie.



Obrázek 1.6: Fasáda Santa Maria Novella navržena L. B. Albertim [5]

1.4 Maurits Cornelis Escher

Nejznámějším umělcem, který cíleně propojoval teselace s výtvarným uměním a matematikou, byl M. C. Escher (1898–1972). Inspirován návštěvou Alhambry vytvořil desítky rytin a grafik, ve kterých figury lidí, zvířat a dalších bytostí pokrývají rovinu pravidelně, často s použitím zrcadlení a rotace.

Escher spolupracoval s matematiky, přestože sám neměl matematické vzdělání. Jeho práce popularizovala pojmy jako grupy symetrií, hyperbolická geometrie nebo nekonečné prostorové transformace. Escherovy obrazy se staly inspirací pro generace výtvarníků i vědců. Pro většinu populace je známý pro své optické iluze (tzv. magická perspektiva) a teselace se zvířaty (viz obr. 1.7). [5], [6]

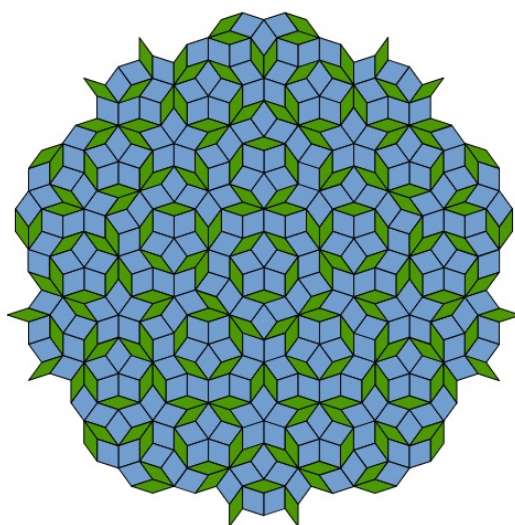


Obrázek 1.7: Escherovy ještěrky [6]

1.5 Moderní matematická teorie teselací

Už během 18. století se začaly formálně klasifikovat symetrie a mnohoúhelníky, což vedlo i k formální klasifikaci pravidelných a polopravidelných teselací v 19. století. V roce 1887 Evgraf Stepanovič Fjodorov publikoval první úplnou klasifikaci rovinových grup symetrií (Wallpaper Groups). Více ke klasifikaci v kapitole 2.5.

V 70. letech 20. století vytvořil britský fyzik Roger Penrose nový typ teselací, které pokrývají rovinu bez periodického opakování, tedy aperiodické. Nejznámější Penroseovy teselace využívají dvou základních dlaždic, deltoidů, které jsou umísťovány vedle sebe. Výsledkem jsou neperiodické, avšak vysoce strukturované vzory. Další sady dlaždic, kterou představil obsahovala 6 dlaždic a třetí a poslední Penrosem představená sada obsahovala dva kosočtverce, jejichž úhly jsou 36° a 144° , a u druhého 72° a 108° (viz obr. 1.8). Idea důkazu, že se opravdu jedná o aperiodickou teselaci je založena na podílu počtu větších a menších kosočtverců, ten by v nekonečné Penrosově teselaci byl roven přesně zlatému řezu, tzn. iracionálnímu číslu, a proto by v takové mozaice opravdu nebylo možné definovat elementární opakující se buňku, ale tato idea přesahuje rozsah této práce. [7]



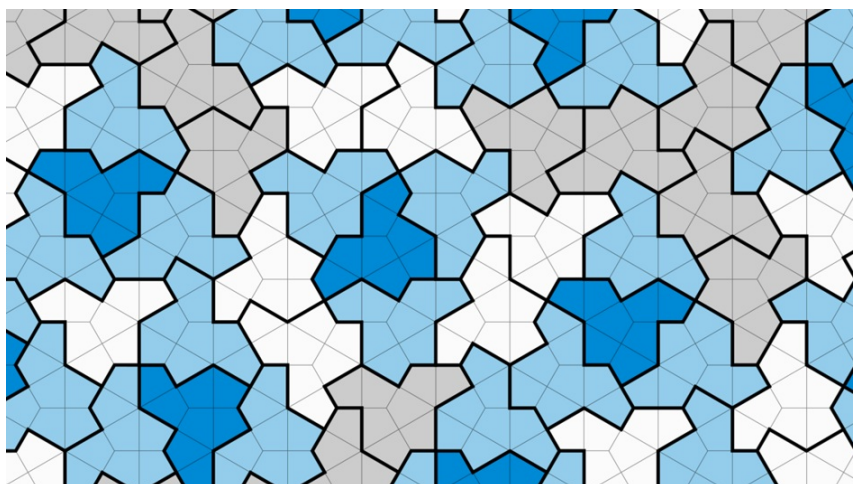
Obrázek 1.8: Penroseova teselace [7]

Penroseovy vzory se ukázaly být velmi užitečné i ve fyzice. V 80. letech byly objeveny kvazikrystaly, látky s neperiodickým, ale nikoli náhodným vnitřním uspořádáním, které odpovídají právě těmto geometrickým strukturám. [8]

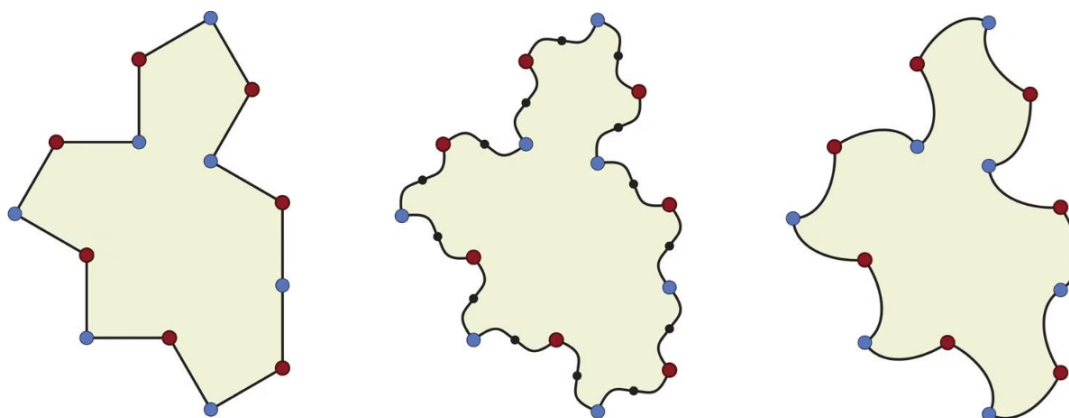
1.6 Teselace v současnosti

Moderní počítačová grafika a algoritmická geometrie umožňují generovat nové typy teselací pomocí výpočetních metod. Aplikace zahrnují 3D tisk, textilní design, architekturu, bezpečnostní kódy a další oblasti. Teorie grafů, topologie a algebraická geometrie umožňují modelování a analýzu složitých prostorových struktur.

Významný pokrok přinesly algoritmy hledání tzv. monotilů – tvarů, které samy dokážou pokrýt rovinu neperiodicky. V roce 2022 byl objeven první tzv. Einsteinův klobouk nebo košile (ang. Einstein tile) (viz obr. 1.9), tedy tvar, který sám o sobě, ale za užití zrcadlení, vytvoří neperiodickou teselaci. Tento objev opět rozšířil matematické možnosti tohoto fascinujícího pole. Na základě Einsteinova klobouku byla v roce 2023 objevena dlaždice, která je schopna teselovat aperiodicky, a to bez zrcadlení, v souvislosti s tím se s ní můžeme nejčastěji potkat pod názvem *vampire einstein* nebo *spectre*. Na obrázku 1.10 je znázorněn vývoj této dlaždice splňující přísnější kritérium než Einsteinův klobouk, který vidíme vlevo na obrázku, zbylé dva tvary na obrázku už splňují přísnější kritérium. Zajímavostí o obou těchto významných útvech je, že přestože název napovídá souvislost s Albertem Einsteinem, není tomu tak, název vznikl z německého *ein Stein* tedy jeden kámen, popř. jeden tvar. [9], [10]



Obrázek 1.9: Einstein tile [8]



Obrázek 1.10: Vampire einstein tile [9]

Teselace dnes přesahují hranice matematiky a umění. Jsou využívány v architektuře (např. konstrukce lehkých nosných struktur), v biologii (např. buněčné uspořádání rostlin), ve fyzice (modely kvazikrystalů) i v chemii (molekulární dlaždice).

V informatice se používají v kompresi obrazu, kryptografii a herním designu. V umění pak stále inspirují výtvarníky a designéry při tvorbě nových vzorů.

Teselace představují fascinující průnik mezi uměním a vědou. Jejich historie sahá od nejstarších civilizací až po špičkový výzkum současnosti. Ukazují, jak se člověk snaží pochopit a ovládnout prostor prostřednictvím pravidel, symetrie a krásy. Od jednoduchých čtvercových dlaždic po složité neperiodické vzory, teselace odrážejí nekonečnou kreativitu a důmyslnost matematického myšlení.

Kapitola 2

Základní pojmy

Tato kapitola čtenáři představí základní pojmy, které je pro práci s teselacemi vhodné znát. Většina definic uvedených v kapitole jsou přeloženy z [1] a některé české výrazy pro pojmy jsou převzaty z [11] nebo [12]. Obrázky v kapitole jsou vytvořeny autorkou pomocí softwaru Geogebra.

2.1 Teselace

Jako první je nutné vysvětlit pojem *teselace*. Teselací prostoru rozumíme jeho vyplnění útvary (tělesy) bez mezer a překrytí. Tyto útvary se nazývají *prvky teselace* (taktéž *cely* či *buňky*). Odborněji řečeno se tedy jedná o rozklad prostoru na množiny, které jsou po dvou disjunktní, jejichž sjednocením je celý prostor samotný a splňují podmínky specifikované níže.

2.2 Rovinná teselace

V následující kapitole se budeme věnovat pojmům souvisejícím s teselacemi roviny, tedy zaměříme se nejprve na nejvíce intuitivní příklady teselace. Pro rovinou teselaci se v české literatuře můžeme setkat s pojmem pokrývání roviny, mozaika nebo dláždění. V případě roviny pak nemusíme hovořit o vyplňování prostoru prvky teselace, nýbrž o vyplnění roviny dlaždicemi nebo kachlemi.

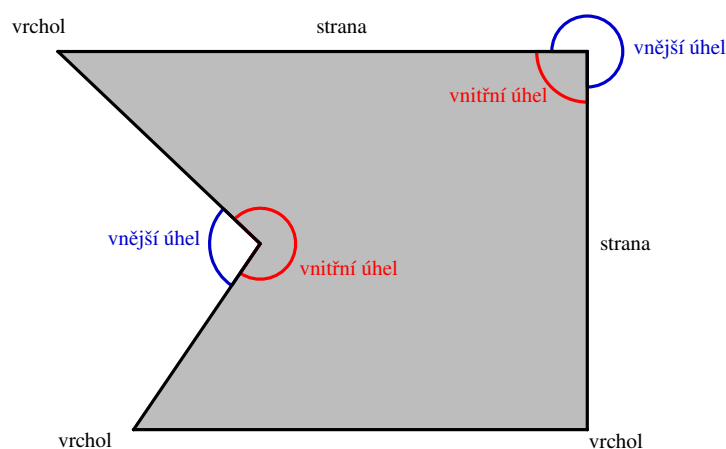
2.2.1 Dlaždice

Dlaždici lze volně definovat jako rovinný útvar jehož hranicí je jedna uzavřená křivka/ložená čára, tzn. dlaždice je jakýkoli rovinný útvar „bez děr“. Dlaždice se nesmí „zužovat“ do jednoho bodu nebo úsečky, tj. nesmí být složena ze dvou útvarů dotýkajících se v bodě (viz obr. 2.1). O dlaždici tak můžeme odborněji říct, že se jedná o uzavřený topologický disk. To je množina obsahující svou hranici, která je homeomorfní (tj. izomorfismus topologických prostorů) s uzavřeným kruhem v euklidovské rovině (více a podrobněji vysvětleno v [13]).



Obrázek 2.1: Ukázka útvarů, které nejsou dlaždicemi; (A) dva útvary dotýkající se v bodě; (B) útvar „s dírou“; (C) sjednocení dvou samostatných útvarů

V rovině obvykle hovoříme o mnohoúhelníkových dlaždicích jejichž obvod je tvořen několika *stranami* a *vrcholy* (bod, ve kterém se potkávají strany). U každého vrcholu leží vnitřní a vnější úhel. *Vnitřní úhel* je svírán stranami setkávajícími se ve vrcholu a je uvnitř dlaždice, *vnější úhel* je svírán stejnými stranami, ale je mimo dlaždici. Součet vnějšího a vnitřního úhlu u vrcholu bude vždy 360° .

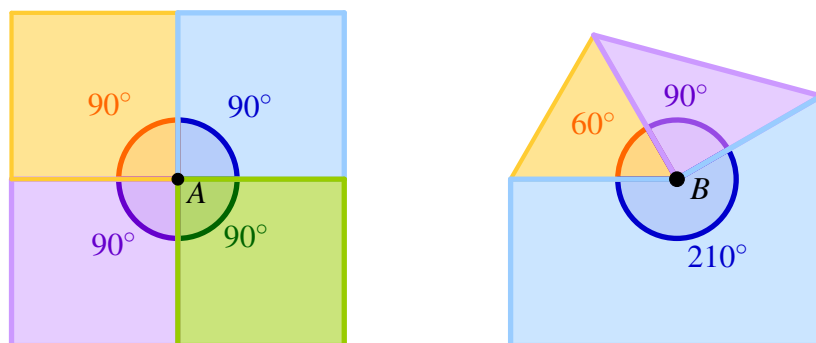


Obrázek 2.2: Ukázka dlaždice

2.2.2 Vertexty

Nyní se přesuneme do situace, kdy už budeme mít více dlaždic vedle sebe, tedy část teselace roviny. Bod, ve kterém se setkávají tři a více dlaždic, se nazývá *vertex* (možné užití termínu vrchol, ale pro přehlednost bude v práci užíván vrchol, jakožto vrchol dlaždice a vertex, jakožto bod, který je vrcholem tří a více dlaždic zároveň). Počet dlaždic setkávajících se

ve vertexu určuje *stupěň tohoto vertexu* (převzato v angličtině je možné použít i termín *valence vertexu*). Součet vnitřních úhlů dlaždic vertexu je vždy 360° . Kromě stupně vertexu jsme schopni určovat *typ vertexu*. Řekneme, že dva vertexy jsou stejného typu, jestliže se v obou z nich potkávají dlaždice stejného typu a ve stejném pořadí.

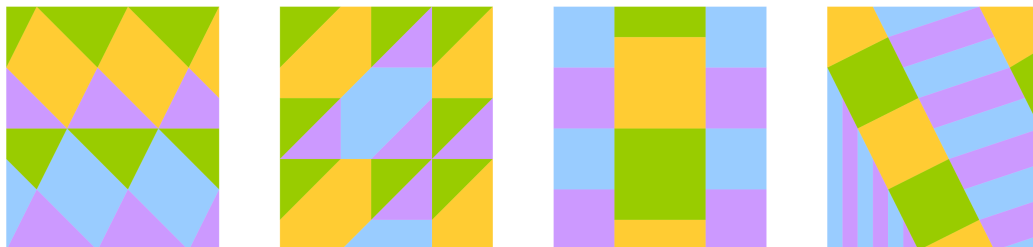


Obrázek 2.3: Ukázka vertexů; bod A je vertex stupně 4; bod B je vertex stupně 3

2.2.3 Typy rovinných teselací

Podle uspořádání dlaždic

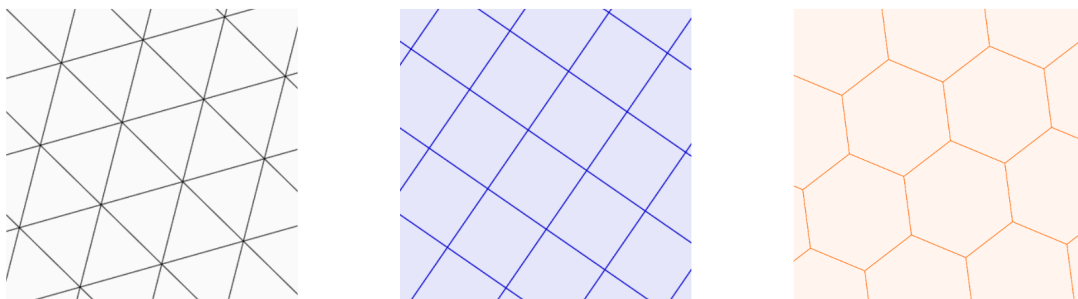
Teselace roviny můžeme rozdělit do dvou kategorií, a to podle stylu skládání dlaždic, na teselace *typu strana ke straně* (ang. *edge to edge*) a zbylé tj. kde se strany neshodují. Teselace je typu *strana ke straně*, jestliže se dlaždice dotýkají celou stranou, tj. 2 sousední mnohoúhelníky vždy sdílí celou stranu a nikdy pouze její část, kromě toho mohou mít společný vertex (viz obr. 2.4).



Obrázek 2.4: Teselace typu strana ke straně (dvě vlevo) a teselace, kde se strany neshodují (dvě vpravo)

Podle tvaru dlaždic

V rovinných teselacích se velmi často setkáváme se specifickými útvary, a to s *rovnostrannými mnohoúhelníky* (mnohoúhelník, který není nutně pravidelný, ale všechny jeho strany mají stejnou délku) a *pravidelnými mnohoúhelníky* (všechny jeho strany mají stejnou délku a všechny vnitřní úhly stejnou velikost). Některé z těchto pravidelných mnohoúhelníků jsou schopny tvořit tzv. *pravidelnou teselaci*, tj. teselace typu strana ke straně, která je tvořena kongruentními pravidelnými mnohoúhelníky. Je tedy snadné si promyslet, že ne všechny pravidelné mnohoúhelníky jsou schopny vyplnit rovinu, ale pouze ty, jejichž velikost vnitřního úhlu dělí 360° beze zbytku. Tuto vlastnost má pouze rovnostranný trojúhelník, čtverec a pravidelný šestiúhelník. Pravidelné teselace jsou tak právě 3 a jsou tvořeny dlaždicemi tvaru rovnostranného trojúhelníku, čtverce nebo pravidelného šestiúhelníku. Dále můžeme říci, že v pravidelných teselacích jsou všechny vertexy stejného stupně a typu.



Obrázek 2.5: Tři pravidelné teselace

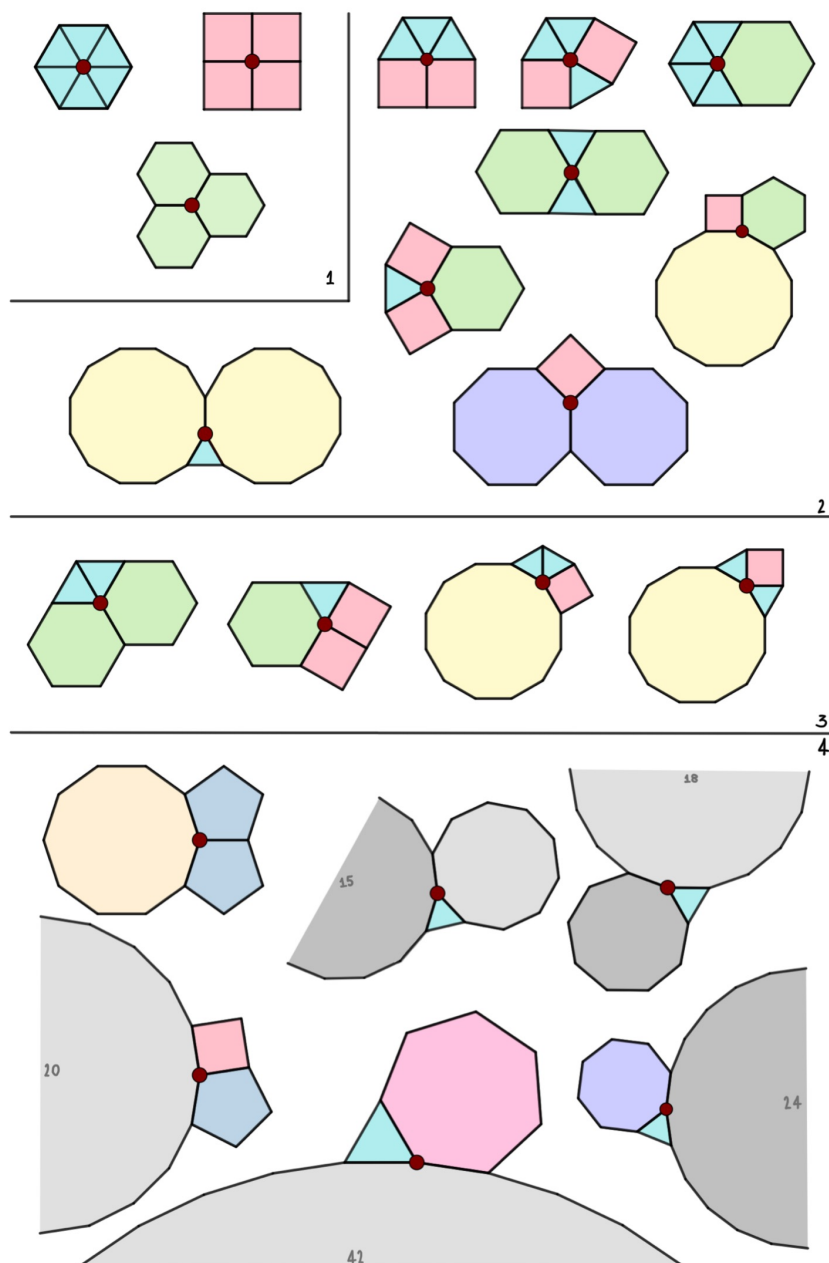
Jestliže se v teselaci opakuje nějaký tvar (jako například v pravidelné teselaci), říkáme že dlaždice takového tvaru je tzv. *základní dlaždice* neboli *prototvar* (tvar opakující se v teselaci, ne nutně vždy ve stejné velikosti a orientaci). Má-li teselace pouze jeden prototvar, říkáme, že tato dlaždice je schopna teselace. Např. čtverec je schopen teselace, ale pravidelný pětiúhelník teselace schopen není. Teselace nemusí mít pouze jeden prototvar. Je-li v teselaci pouze jeden (tzn. všechny dlaždice jsou kongruentní, podobné nebo osově převrácené stejné tvary), říkáme, že je teselace *monohedrál ní*. Kdyby měla právě 2 prototypy (např. teselace složená z rovnostranných trojúhelníků a čtverců), řekneme, že se jedná o teselci *dihedrál ní*. Analogicky můžeme hovořit o teselaci trihedral ní atp.

Dalším typem teselací jsou *polopravidelné teselace*, ty jsou tvořeny dlaždicemi o 2 a více tvarech. Všechny dlaždice však musí být tvaru pravidelného mnohoúhelníku a všechny vertexy musí být stejného typu. Příkladem polopravidelné teselace může být např. vyplnění roviny pomocí rovnostranných trojúhelníků o délce strany a a pravidelných šestiúhelníků o délce strany a .

Pravidelné a polopravidelné teselace se označují jako *teselace archimedovské* (je možné se setkat s označením archimedovské i pouze pro polopravidelné teselace).

Dále se ještě můžeme setkat s pojmem *periodická teselace*, to je taková teselace, ve které se periodicky opakuje vzor dlaždic. Speciální kategorií periodických teselací jsou ty, které se skládají pouze z pravidelných n -úhelníků. V takových teselacích se setkáváme s 15 typy vertexů, které tvoří část skupiny druhů vertexů, které jsme schopni poskládat za pomoci

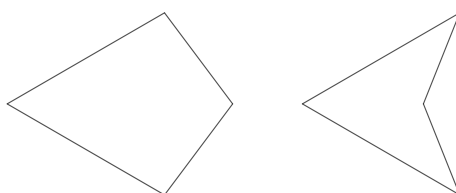
pouze pravidelných n -úhelníků. Celkem je těchto vertexů 21 (viz obr. 2.6). V sekci 1 obrázku vidíme vertexy vyskytující se v pravidelných teselacích, v sekci 2 vidíme vertexy poloprávidelných teselací, v sekci 3 jsou vertexy, které se mohou vyskytovat v teselacích typu strana ke straně, ale zároveň na rozdíl od sekcí 1 a 2 v teselacích s vertexy ze sekce 3 se musí vyskytovat více než jeden znázorněný typ vertexu. Vertexy ve 4. sekci se nevyskytují v žádných periodických teselacích.



Obrázek 2.6: 21 typů vertexů, kde číslice uvnitř částí pravidelných mnohoúhelníků značí o kolikaúhelník se jedná

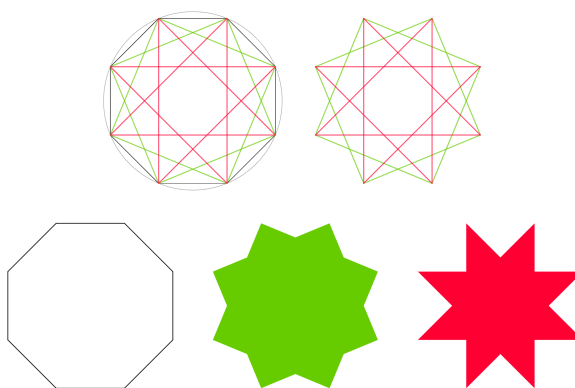
Další často užívané útvary

Kromě pravidelných mnohoúhelníků se v teselacích často setkáváme i s jinými specifickými útvary. Jedny z nejčastěji se vyskytujících jsou *konvexní* a *nekonvexní deltoid*. Konvexní deltoid (anglicky *kite* tedy drak) je čtyřúhelník, jehož dvě sousední strany jsou délky a a zbylé dvě sousední strany mají délku b a všechny jeho vnitřní úhly jsou menší než 180° . Nekonvexní deltoid (anglicky *dart* tedy šipka) je čtyřúhelník, jehož dvě sousední strany jsou délky a a zbylé dvě sousední strany mají délku b a jeden z jeho vnitřních úhlů je větší než 180° .



Obrázek 2.7: Konvexní a nekonvexní deltoid

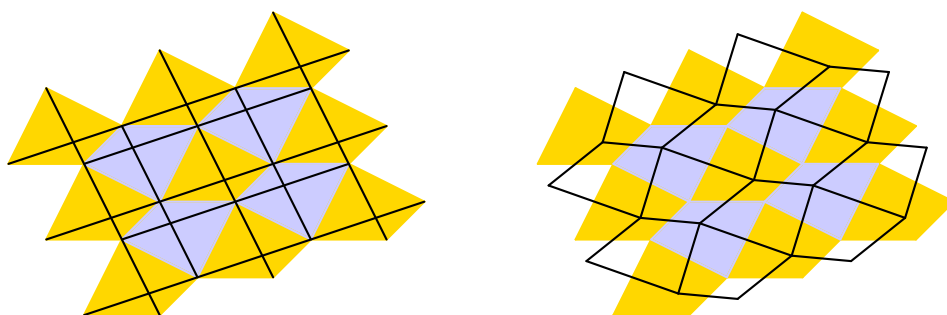
Dalším ve středoškolské geometrii poněkud nestandardním rovinným útvarem, jenž se vyskytuje v teselacích je tzv. hvězdicový mnohoúhelník, typický pro islámské mozaiky. Hvězdicový mnohoúhelník je tvar, který vznikl spojováním bodů rovnoměrně rozmístěných po kružnici. Konkrétněji tedy, mějme p bodů rozmístěných rovnoměrně po kružnici, tzn. mějme pravidelný p -úhelník, kde $p \geq 3$, $p \in \mathbb{N}$ a budeme propojovat každé q -té body. Tomuto procesu říkáme stelace pravidelných mnohoúhelníků. Stelace mnohoúhelníku může být i několikanásobná viz obr. 2.8. Propojujeme-li každý druhý bod, jedná se o první stelaci (na obrázku zeleně), propojujeme-li každý třetí, jedná se o druhou stelaci atp.



Obrázek 2.8: První a druhá stelace osmiúhelníku

Další typy teselací

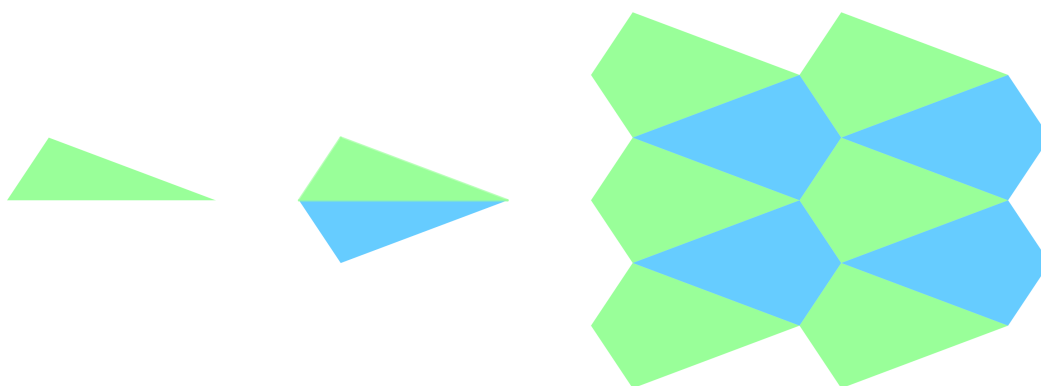
Nová teselace může vzniknout z již existující teselace, a to například spojením středů všech sousedních dlaždic. Vznikne-li teselace tímto způsobem, pak ji nazýváme *teselací duální* k původní teselaci (viz obr. 2.9). Speciálně pak duální teselace k archimedovským teselacím nazýváme *teselací Lavesovou*.



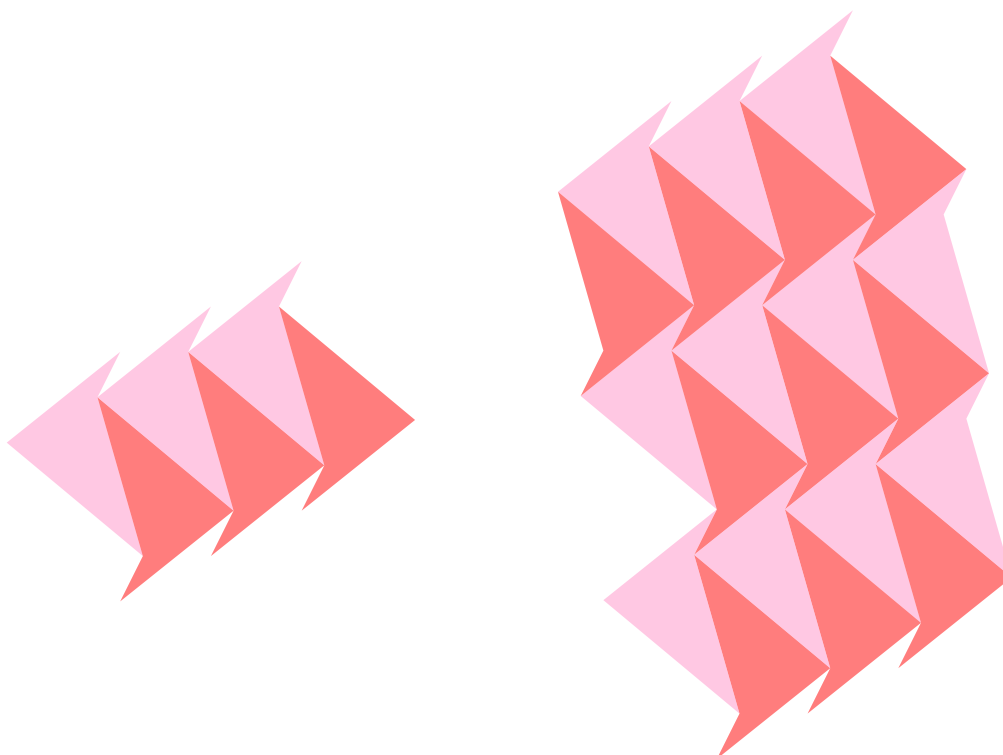
Obrázek 2.9: Konstrukce duální teselace (vyznačena černě vpravo) k již existující teselaci (dvoubarevná teselace „v pozadí“ konstrukce)

2.2.4 Útvary schopné teselace

Dále si můžeme promyslet, že obecně platí tvrzení, že libovolný trojúhelník a čtyřúhelník je schopen teselace. Tvrzení jsou si velmi blízká, jelikož vezmeme-li libovolné dva totožné trojúhelníky, jeden z nich otočíme o 180° a připojíme k neotočenému trojúhelníku, dostaneme čtyřúhelník, na obrázku 2.10 konkrétně deltoid. Podobným způsobem pak můžeme vytvořit teselaci pomocí shodných čtyřúhelníků. Čtyřúhelníky se skládají do řady a střídají se původně orientované a o 180° otočené (viz obr. 2.10). Jen je třeba si promyslet, že takto složené čtyřúhelníky vždy vyplní celou rovinu a ne pouze v případě, kdy se jedná o deltoidy. Vezmeme-li dlaždice tvaru obecného čtyřúhelníku a budeme je skládat do řady, jak bylo již popsáno, a řady pak složíme paralelně vedle sebe, pokryjeme tak celou rovinu (viz obr. 2.11).



Obrázek 2.10: Ukázka jak jak je obecný trojúhelník schopen teselace

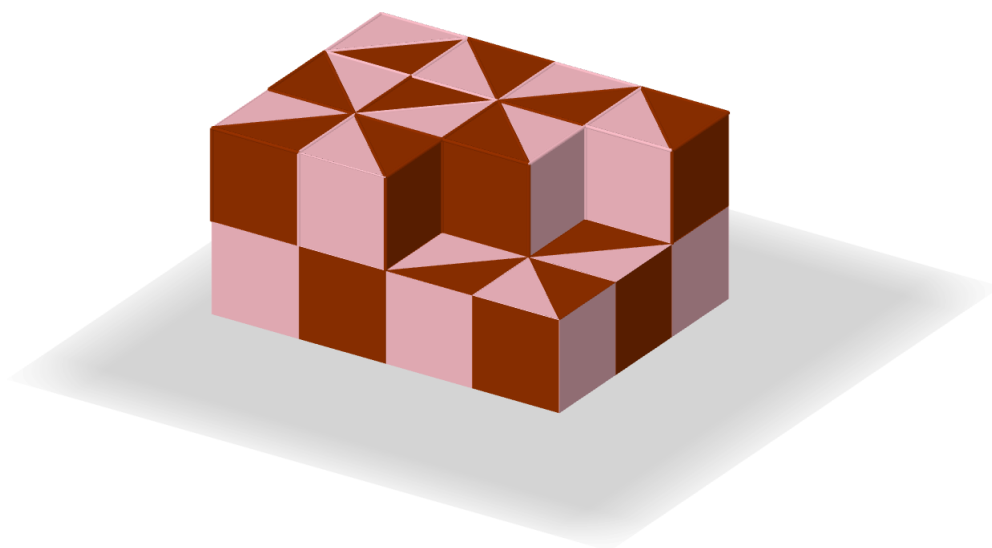


Obrázek 2.11: Ukázka jak je obecný čtyřúhelník schopen teselace

Při vyplňování roviny obecným čtyřúhelníkem využíváme vlastnosti, že součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je 360° . Převrácením a skládáním čtyřúhelníků vedle sebe do řad a následně řad paralelně vedle sebe jsme zaručili, že každý z vertexů je vrcholem všech čtyř vnitřních úhlů zároveň (kde každý úhel přísluší jedné ze čtyř kongruentních dlaždic, které se ve vertexu setkávají).

2.3 Teselace prostoru

Názvosloví a pojmy související s teselacemi roviny lze analogicky používat i pro teselaci prostoru, při které podobně jako dlaždicemi pokrýváme rovinu, vyplňujeme prostor tělesy ať už pravidelně či nepravidelně. Jedním z nejsnazších způsobů, jak vytvořit teselaci prostoru je, si dlaždice teselace roviny představit jako podstavy hranolů o stejné výšce, kterými „po patrech“ vyplníme celý prostor jako na obrázku 2.12.

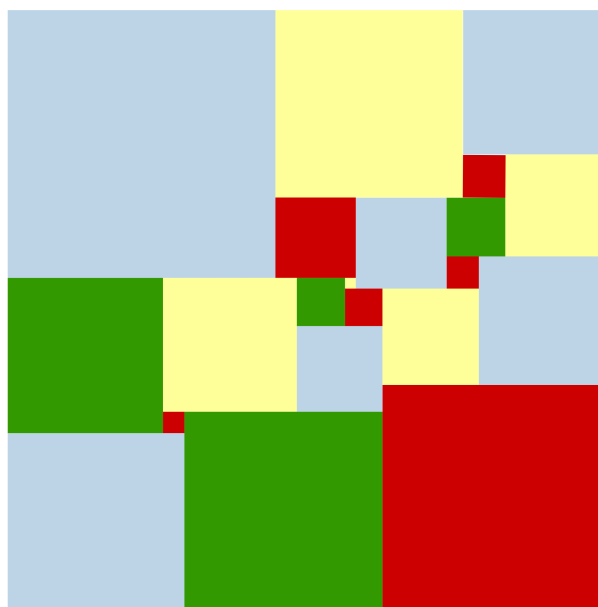


Obrázek 2.12: Ukázka teselace prostoru

2.4 Další teselace

Krom teselací roviny a prostoru se můžeme setkat i s teselací pouze části prostoru nebo jiné plochy než roviny, např. teselace kulové plochy nebo teselace koule či čtvercování čtverce. Čtvercování čtverce se sice řadí mezi teselace, ale definici (2.1) nevyhovuje, jelikož nejde o vyplnění celého prostoru nýbrž o matematický problém či hádanku, tj. jak

vyplnit čtverec pomocí co nejméně čtvercových dlaždic různých celočíselných velikostí. Jedná-li se o vyplnění čtverce čtverci, kde se ovšem některý ze čtverců vyskytuje vícekrát než jednou, říkáme, že se jedná o nedokonalý čtvercovaný čtverec. Nejmenší z dokonalých čtvercovaných čtverců je čtverec o velikosti strany 112 na obrázku 2.13.

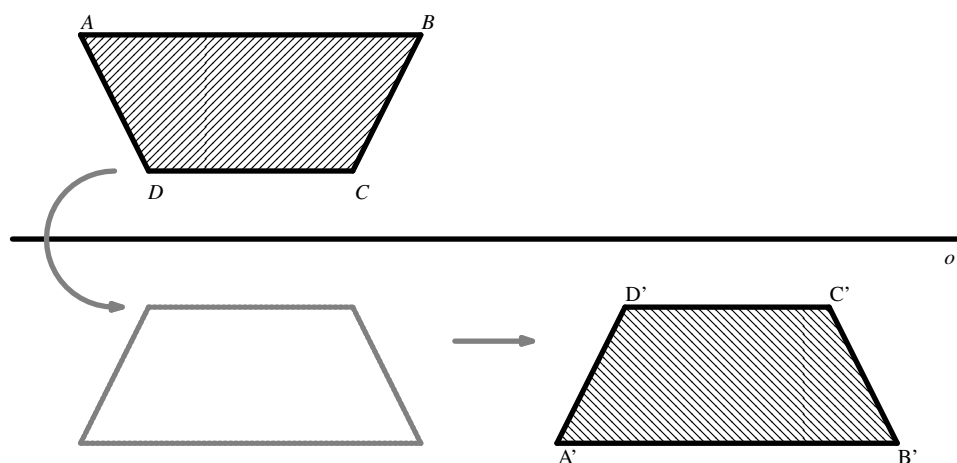


Obrázek 2.13: Ukázka čtvercování čtverce

2.5 Typy symetrických rovinových grup

Tato kapitola představuje stručné shrnutí konceptu symetrických rovinových grup a čerpá z literatury [14], [15], [16], tyto podklady doporučuji v případě zájmu o hlubší porozumění, které je nad rámec této práce. Typy symetrických rovinových grup, někdy též krystalografické grupy (anglicky *crystallographic groups* nebo *wallpaper groups*). Zjednodušeně řečeno se jedná o jakékoli periodicky se opakující pokrytí roviny. Všechna tato periodická pokrytí roviny jsme schopni rozdělit do právě 17 kategorií, které jsou níže popsány. V téměř jakékoli teselaci (nutno vynechat neperiodické teselace) roviny budeme schopni rozeznat právě jeden z typů symetrických rovinových grup. Nejjednodušší z nich využívá pouze posunutí a se zvyšující se komplexností typů se posunutí kombinuje s rotací, zrcadlením nebo osovou souměrností. Níže je uveden přehled těchto typů (značeno tzv. zkráceným Hermann–Mauguinovým označením) se stručným popisem, kde klouzavou osovou souměrností je myšlena osa posunutého zrcadlení (např. stopy lidské chůze v písku za předpokladu, že chodidla jsou dokonale symetrická), které vzniká složením osově

souměrnosti a posunutí. Pojem *klouzavá osa* je zde použit pro snadnější představu žáka, jelikož toto shodné zobrazení se běžně na středních školách neprobírá, proto je i poskytnut demonstrační obrázek 2.14, kde o je osa posunutého zrcadlení a lichoběžník $A'B'C'D'$ je obrazem lichoběžníku $ABCD$.

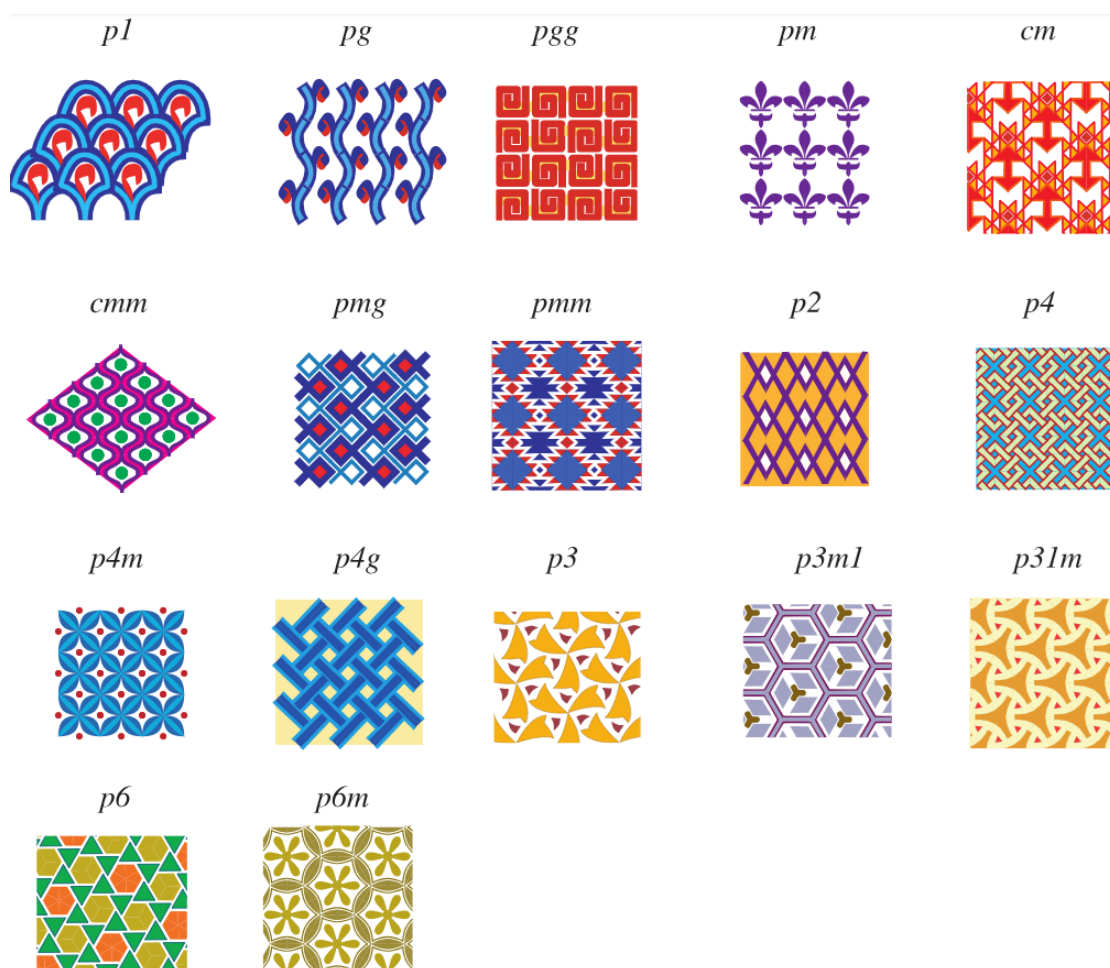


Obrázek 2.14: Demonstrace posunutého zrcadlení

Ačkoliv se rozlišování různých typů symetrických rovinných grup může zdát naprosto nad rámec této práce, je přehled zahrnut jako obohacení a objasnění poznámky v 1.2, kde se 17 typů symetrických rovinných grup zmiňuje v souvislosti s palácem Alhambra. Pro čtenářovu lepší a snadnější představu je uvedena kromě přehledu v tabulce i ukázka všech 17 typů krystalografických grup 2.15.

Číslo	Označení	Popis
1	p1	Pouze translace (nejjednodušší vzor bez dalších symetrií)
2	p2	Translace + rotace o 180°
3	pm	Translace + 2 osově souměrnosti (rovnoběžné osy)
4	pg	2 klouzavé osově souměrnosti (rovnoběžné osy)
5	cm	Zrcadlení + klouzavá osová souměrnost (rovnoběžné osy, kde klouzavá osa půlí pás tvořený osami zrcadlení)
6	pmm	2 osově souměrnosti (kolmé osy) + rotace o 180°
7	pmg	Kombinace osových a klouzavých souměrností (na sebe kolmé osy) a rotace o 180°
8	pgg	2 klouzavé osy (na sebe kolmé osy) a rotace o 180°
9	cmm	Dvě osy souměrnosti (na sebe kolmé) + 2 klouzavé osy (na sebe kolmé) + rotace o 180°
10	p4	2 rotace o 90° a jedna rotace o 180°
11	p4m	2 rotace o 90° a jedna rotace o 180° + osy zrcadlení + klouzavé osy
12	p4g	2 rotace o 90° + klouzavé osy + příslušné osy souměrnosti
13	p3	3 rotace o 120°
14	p3m1	3 rotace o 120° + 3 osy souměrnosti + klouzavé osy (půlící pásy tvořené osami souměrnosti)
15	p31m	3 rotace o 120° + 3 osy souměrnosti + klouzavé osy (půlící pásy tvořené osami souměrnosti), od p3m1 se liší umístěním středů rotace
16	p6	Rotace o 60° , 120° , 180°
17	p6m	Rotace o 60° , 120° , 180° + 6 os souměrnosti + klouzavé osy půlící pásy os souměrnosti

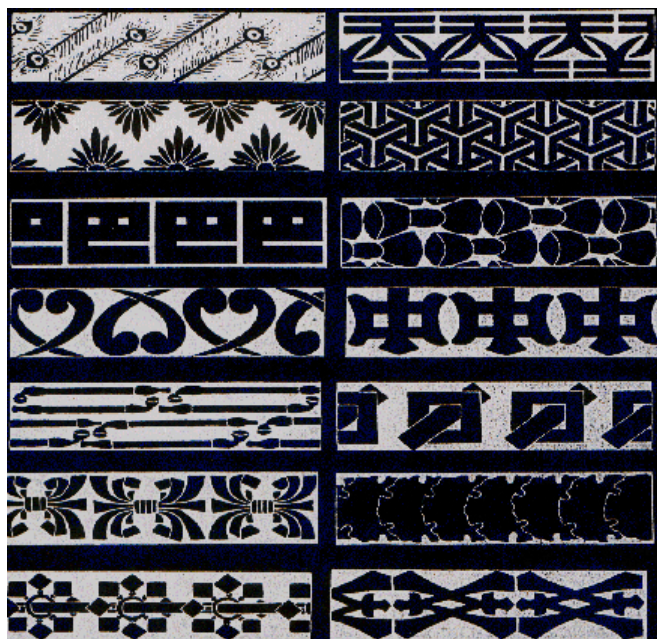
Tabulka 2.1: Přehled 17 dvourozměrných rovinových symetrických grup



Obrázek 2.15: Ukázky všech typů symetrických rovinných grup [10]

2.6 Pásové grupy symetrie

Anglicky *frieze groups*, v češtině je možné se setkat i s označením frízové grupy symetrie. V této podkapitole se nebudu zabývat jednotlivými typy pásových grup, nýbrž jen představím o co se jedná, aby byl čtenář v kapitole 6 schopen zvládnout aktivitu opírající se o následující. Zjednodušeně můžeme říct, že pásové grupy symetrie, jsou symetrické vzory opakující se jen v jednom směru, na rozdíl od 2.5, kde se vzory opakovaly ve dvou směrech (aby byla pokryta celá rovina). Jelikož je jedná o opakování pouze v jednom směru, vzniká tak jakýsi vzorovaný pás viz obr. 2.16. Práce se bude věnovat tvorbě periodických teselací rovinných pásů, které přirozeně tvoří pásové grupy symetrie.



Obrázek 2.16: Ukázka pásových grup symetrie [11]

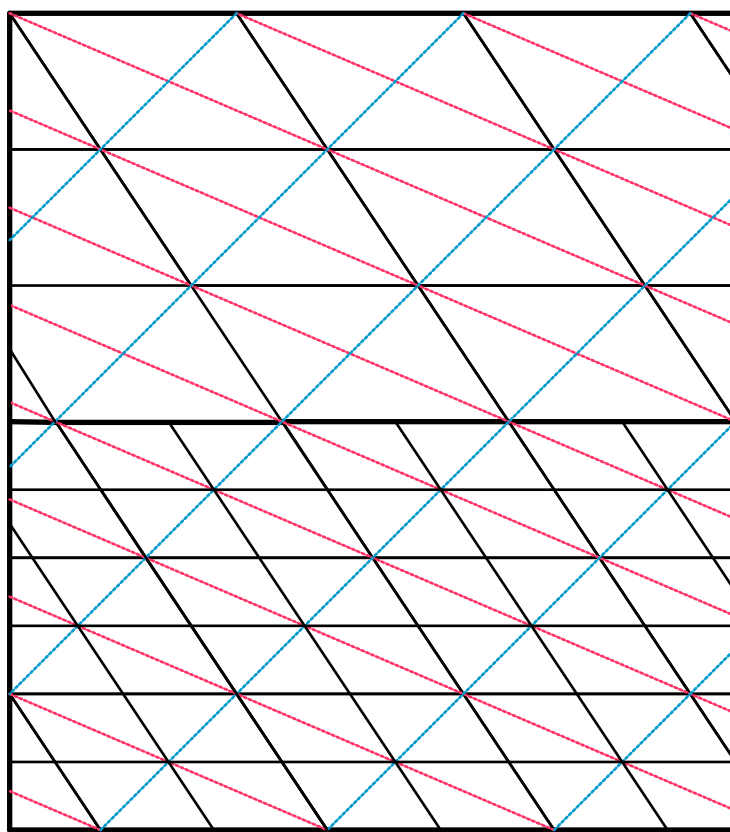
Kapitola 3

Tvorba rovinných periodických teselací

Vzhledem k charakteru některých z mezipředmětových aktivit v kapitole 5 považuji za důležité čtenáře vybavit vědomostmi o tvorbě teselací užitím netradičních a nepravidelných útvarů. V aktivitách se nejednou vyskytuje poněkud kritická část plnění úkolu, kdy se předpokládá, že žák je schopen být dosti kreativní na to, aby vytvořil vlastní teselaci, což může být nelehký úkol. Tato náročná část by se dala např. v aktivitách do informatiky obejít tím, že žákům poskytneme existující teselace pro inspiraci. Aby byl žák schopen si vytvořit teselaci samostatně, buďto na počítači nebo na papíře, je třeba ho nejdříve vybavit teoretickými znalostmi, jak se u tvorby postupuje. Nejprve se zaměříme na méně náročné taktiky generování teselací a následně pak postoupíme ke komplexnějším postupům tvorby periodické teselace.

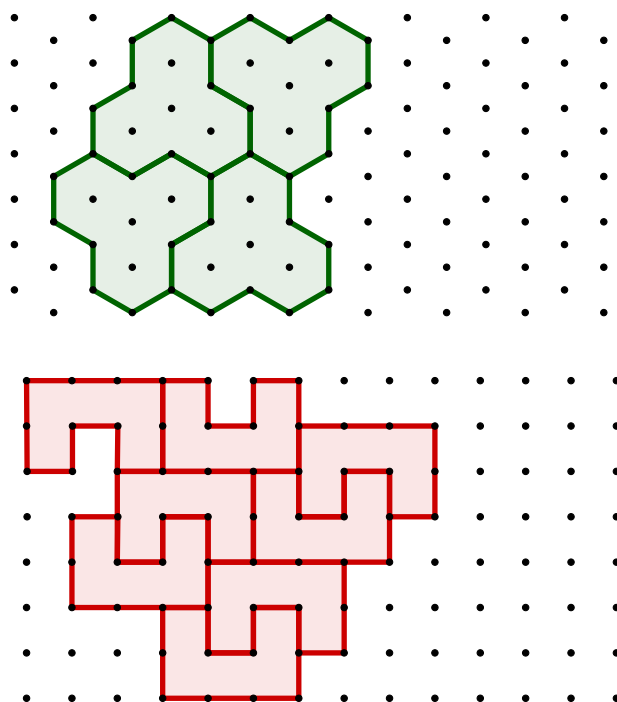
3.1 Techniky generování teselací

V kapitole 2 jsme se setkali s nemalým množstvím vlastností teselací, mimo jiné s tím, že každý trojúhelník i čtyřúhelník je schopen teselovat. Periodické teselace jsme schopni tvořit za využití této informace, obvyklé taktiky tvorby vychází z jednodušších teselací jako je např. teselace využívající jedné dlaždice tvaru čtyřúhelníku. Nové teselace z této již existující můžeme získat hned několika způsoby. Můžeme každou dlaždici diagonálně rozpůlit v jednom či druhém směru nebo obou najednou nebo můžeme dlaždice rozdělit na více dlaždic spojováním průsečíků diagonál jednotlivých dlaždic atd. Zkrátka můžeme využít jakéhokoli pravidelného rozdělení dlaždic na více menších, jako je naznačeno na obrázku 3.1. Kromě zmíněného můžeme využívat, vycházíme-li z teselace obsahující n -úhelníky, kde n je alespoň 5, ještě dělení dlaždic na menší spojováním vrcholů n -úhelníku např. každý druhý popř. třetí vrchol.

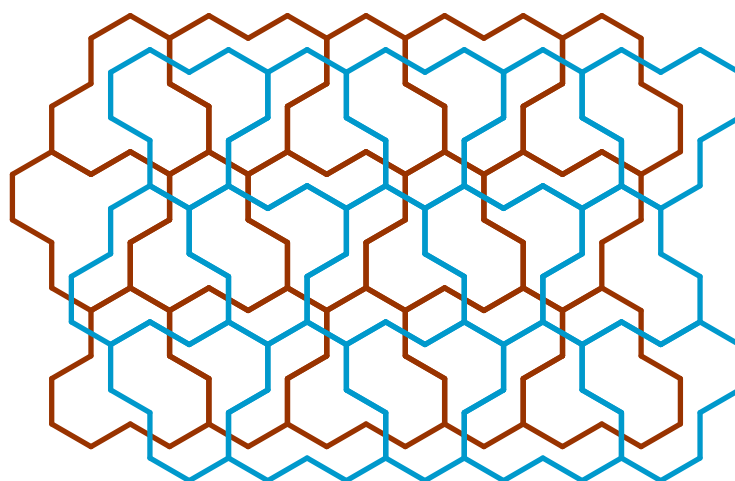


Obrázek 3.1: Ukázka generování nové teselace pomocí již existující teselace: V horní části rozdělením dlaždic úhlopříčkami a ve spodní části ještě navíc i spojnicemi průsečíků úhlopříček dlaždic

Další možností, jak vytvořit periodickou teselaci, je využití sítě bodů, která zaručí přesnost tvorby. Tyto sítě se z pravidla využívají čtvercové nebo rovnostranně trojúhelníkové viz obrázek 6.3.3, ale můžeme se setkat i např. se šestiúhelníkovou sítí. Dále bychom mohli generovat nové teselace tzv. překládáním teselací, které mohou být shodné nebo různé viz obrázek 3.3, kde jsou přeloženy dvě shodné teselace.



Obrázek 3.2: Ukázka generování nové teselace pomocí sítě bodů, do které je teselace vepisována



Obrázek 3.3: Ukázka generování nové teselace pomocí překládání teselací (konkrétně přeložení teselace její posunutou zrcadlenou verzí)

3.2 Modifikace základní dlaždice

Tato kapitola představuje dvě základní taktiky modifikování dlaždic teselace, v praxi se však nejčastěji setkáváme s nejrůznějšími kombinacemi těchto modifikací, podobně jako je popsáno níže (viz obr. 3.12).

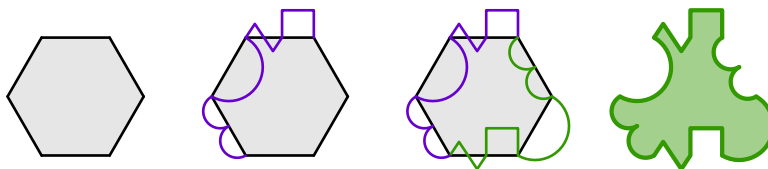
3.2.1 Modifikace pomocí posunutí

Lehce náročnějším způsobem tvorby nových teselací, který rozhodně stojí za zmínku, je modifikace již existující teselece, resp. modifikace její základní dlaždice. Základní ideu tohoto modifikování můžeme pozorovat na obrázku 3.4, kde jsme začali s teselujícím tvarem, v tomto případě rovnoběžníkem, kterému jsme následně modifikovali jednu jeho stranu, tj. úsečku jsme nahradili kružnicovým obloukem. Shodným kružnicovým obloukem pak nahradíme i stranu rovnoběžnou s původně modifikovanou stranou, tím zajistíme, že vzniklý tvar bude opět schopen teselovat. Zjednodušeně by se dalo říci, že co na jedné straně uberu (resp. přidám), to na protější straně přidám (resp. uberu) k původní dlaždici.



Obrázek 3.4: Ukázka generování nové teselace pomocí modifikace - tvorba nové základní dlaždice

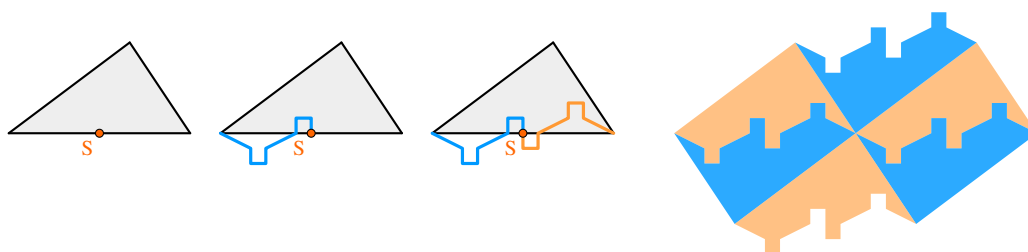
Na obrázku 3.5 můžeme vidět, jak je možné tvořit tímto způsobem i mnohem komplikovanější útvary, musíme však dbát na to, aby teselující dlaždice, ze které postup vychází, měla protější strany rovnoběžné.



Obrázek 3.5: Ukázka generování nových teselujících útvarů posunutím

3.2.2 Modifikace pomocí otočení

Kromě modifikace dlaždice popsané výše (3.2.1), je možné modifikovat dlaždici, která sama o sobě teseluje s využitím otočení. Nyní nebude jako v předchozím případě výchozí tvar dlaždice, která je schopna teselace jen posunutím, ale budeme vycházet z tvaru, který pro teselování využívá zrcadlení jako na obrázcích 2.10 nebo 2.11. Na obrázku níže (3.6) je demonstrována myšlenka modifikace takové základní kachle. Nejprve najdeme střed strany dlaždice, kterou máme v plánu upravovat, následně polovinu stany upravíme (modrá lomená čára v obrázku). Tuto lomenou čáru/křivku pak otočíme o 180° kolem středu strany dlaždice S (tím dostaneme oranžovou lomenou čáru v obrázku). Postup můžeme opakovat až pro všechny strany základní upravované dlaždice. Teselaci pak vyskládáváme analogicky jako před úpravami kachle, jako je naznačeno na obrázku.



Obrázek 3.6: Ukázka generování nových teselujících útvarů otočením

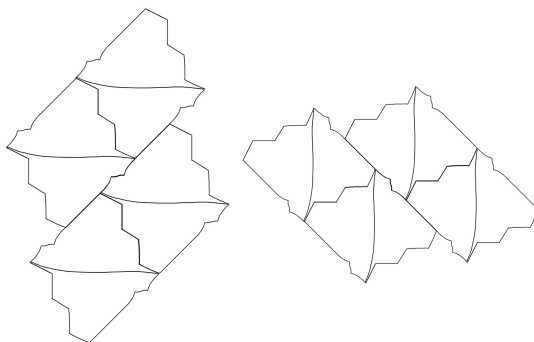
3.3 Typy pro tvorbu escherovských teselací

Ačkoliv tato kapitola zdaleka nepopisuje všechny možnosti tvorby teselací, považuji za důležité, se ještě detailněji podívat na tvorbu escherovských teselací. Tyto teselace jsou obvykle tvořeny neobvyklými geometrickými útvary, které připomínají zvířata nebo lidské postavy. K takovému neobvyklému útvaru, který je ovšem schopen teselace se dostaneme modifikací nějakého, již známého, teselujícího útvaru. Obecně můžeme říci, že chceme-li vytvořit escherovskou teselaci, využíváme modifikací představených výše (3.2.1 a 3.2.2).

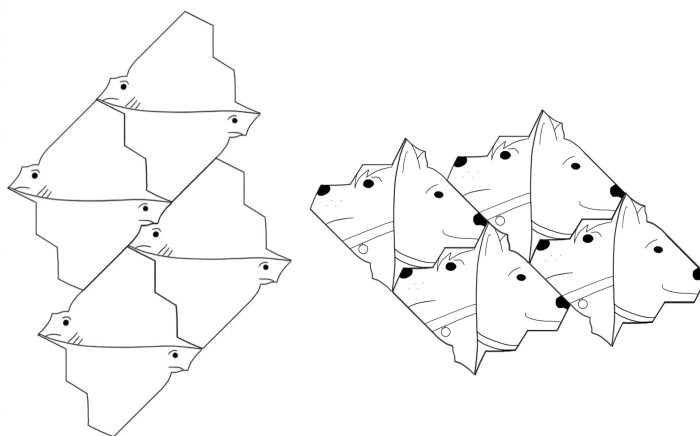
Přestože se Escher zabýval teselacemi i v jiných než euklidovských geometriích, vzhledem k záměru této práce se bude tato podkapitola, stejně jako zbytek práce, zabývat pouze teselacemi euklidovské roviny, aby zůstala relevantní pro střední školu.

1. Není nutné se omezovat na tvorbu pouze ruční na papír nebo pouze na počítači (popř. pouze v jednom softwaru), kombinace obou možností může být nejlepší taktikou.
2. Cílem je, aby teselace připomínala nějaký známý motiv, není však nutné, aby samotná dlaždice byla hned snadno rozpoznatelná. Nositelem představovaného motivu je do velké míry design na jednotlivých dlaždicích. Přesto bychom se ale měli snažit již od

začátku tvarovat dlaždici co nejlíže zamýšlenému tvaru. Na obrázku 3.7 můžeme vidět teselaci roviny bez designu na kachlích, není proto zřejmé, jaký je zamýšlený motiv teselace, tedy jaké zvíře by měla připomínat. Na obrázku 3.8 můžeme vidět tu stejnou teselaci ve dvou různých provedeních jednou jako rejnoky a podruhé jako hlavy psů.



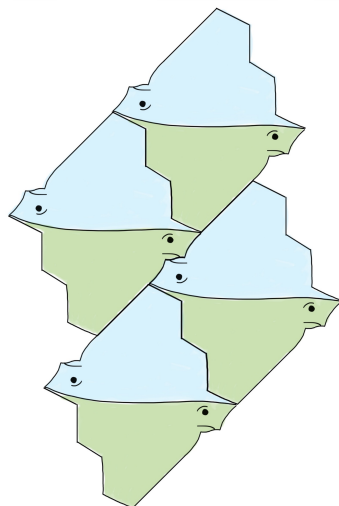
Obrázek 3.7: Teselace bez motivu na kachlích



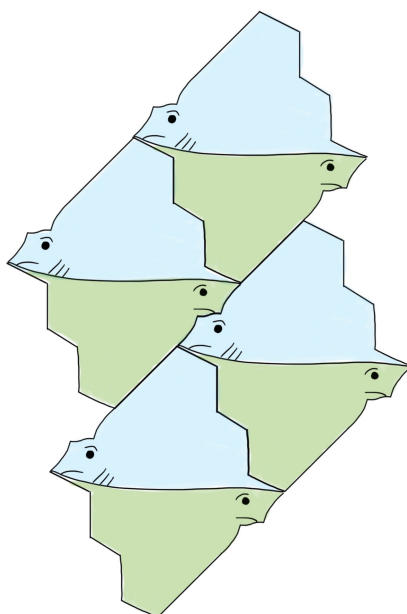
Obrázek 3.8: Teselace s motivem na kachlích

3. Dalším poznatkem je, že je praktické se brzy v procesu tvoření rozhodnout, zda chceme, aby teselace měla všechny dlaždice stejně orientované (v tom případě bychom využili 3.2.1) nebo aby se dlaždice vyskytovala v původní i zrcadlené podobě (využití 3.2.2).
4. Rozhodneme-li se pro možnost s otáčením, je ideální, když orientace motivů dává smysl. To můžeme zajistit buďto tím, že namísto toho, aby motiv byl jednou smysluplně a podruhé vzhůru nohama (obr. 3.9), budeme tvar zrcadlit tak, aby se motiv,

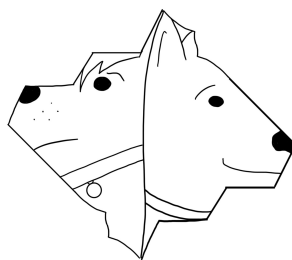
řekněme zvířete, jednou díval doprava a podruhé doleva (obr. 3.10). Dalším možným řešením je rozlišit motiv na tvarem shodných kachlích, aby dávala orientace v obou případech smysl (obr. 3.11).



Obrázek 3.9: Teselace, kde orientace kachlí nedává smysl vzhledem k přirozenosti daného zvířete

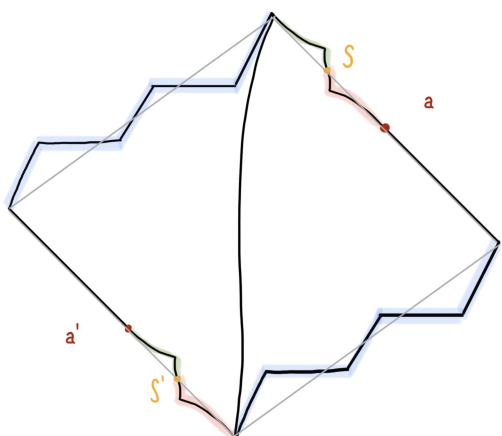


Obrázek 3.10: Teselace, kde motiv kachle napravil nesmyslnou orientaci



Obrázek 3.11: Kachle teselace, kde se zvířata dívají na různé strany

Kromě tipů pro tvorbu escherovských teselací je ještě na místě okomentovat vznik samotné teselace, která je v této sekci užita pro demonstraci některých možných potíží a jejich řešení. Prototyp vznikl kombinací dříve představených modifikací. Konkrétně pro modře zvýrazněné strany v obrázku 3.12 bylo použito posunutí lomené čáry, kterou byly nahrazeny dvě rovnoběžné strany. Zbylé dvě strany vznikly lehce upraveným postupem popsaným v sekci 3.2.2, tj. vybrala jsem část strany, kterou chci modifikovat (to způsobilo to, že výsledná teselace není typu strana ke straně jako v případě, kdy modifikuji celou stranu), našla jsem střed této části a polovinu části jsem nahradila křivkou, kterou jsem pak kolem středu S (resp. S') otočila o 180° (tj. ze zeleně zvýrazněné části křivky se stala část zvýrazněná růžově). Zbytek strany je ponechán jako část původní úsečky. Zrcadlením a posunutím strany a vznikla strana a' . Jedná se o lehce komplikovanější způsob tvorby teselací, ale rozhodla jsem se jej v práci zahrnout jako upozornění na to, že představené postupy tvoří pouze jakýsi základní přehled tvorby escherovských teselací euklidovské roviny, který můžeme libovolně rozšiřovat a upravovat. Představitosti se meze nekladou.

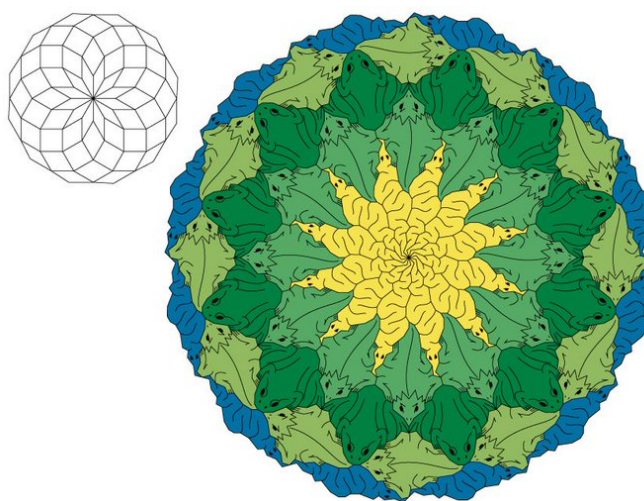


Obrázek 3.12: Popis vzniku teselace na obrázcích 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11

3.4 Další taktiky generování teselací a tvorby escherovských teselací

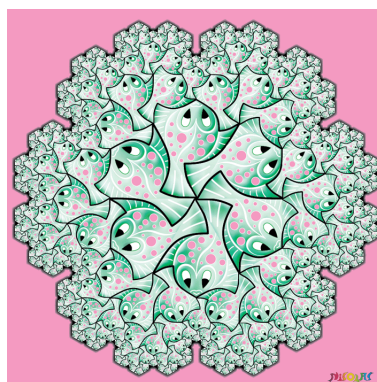
Tato sekce slouží k rozšíření povědomí o dalších možnostech teselací. Tvorby těchto teselací jsou na rozdíl od těch dříve zmíněných náročnější na vytváření, proto taktiky tvorby těchto teselací není nutné ovládat pro zvládnutí úloh v následujících částech práce. Ponechám tak jejich bližší porozumění jako nad rámec pro tuto práci (popř. jako námět pro samostudium čtenáře).

Kromě výše zmíněných možností můžeme ještě změnit celkové uspořádání teselace. Můžeme si jako teselaci k modifikování zvolit rozetovou teselaci podobně jako na obrázku 3.13.



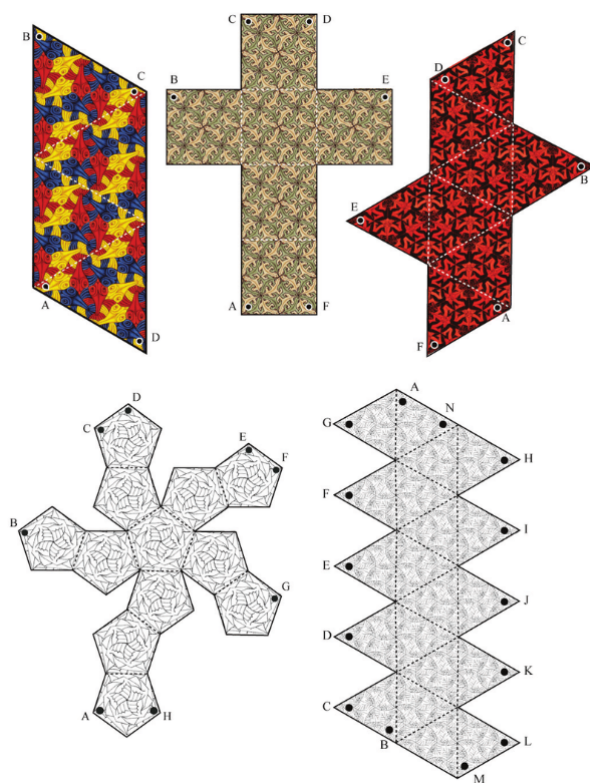
Obrázek 3.13: Rozetová escherovská teselace [12]

Další možností, se kterou se můžeme setkat je fraktálová teselace (na obrázku 3.14).



Obrázek 3.14: Fraktálová escherovská teselace [13]

Poslední možností, kterou bych chtěla zmínit je teselace povrchů hranatých těles, tento typ teselací se nejčastěji provádí na sítích platónských (obr. 3.15) a archimédovských tělesech.



Obrázek 3.15: Teselace sítí platónských těles [14]

Kapitola 4

Souvislost s RVP

Na první pohled se může zdát, že téma teselací je od výuky na středních školách velmi vzdálené, proto bych následující kapitolu chtěla věnovat popisu spojitostí *Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia* [17] (v platnosti od roku 2022) a *Rámcového vzdělávacího programu pro obor vzdělávání stavebnictví* [18] (platné od září 2023).

4.1 Teselace v RVP pro gymnázia

Teselace se pyšní řadou vlastností, které jsou pro žáky na střední škole důvěrně známe. Můžeme hovořit o útvarech, ze kterých se skládají, symetriích, které v nich nacházíme, nebo třeba možnostech, jak útvary poskládat, aby vznikla teselace, ať už rovinná nebo prostorová. Chtít po žácích na SŠ znát teorii stojící za teselacemi by bylo dosti nepřiměřené, ale vést žáky k hledáním souvislostí v teselacích může být přínosem. Dovoluji si tedy uvést pár konkrétních příkladů, které ukazují zmíněné přínosy. V RVP v kapitole *Matematika a její aplikace* můžeme najít očekávané výstupy pro argumentaci a ověřování, kde by žák měl vytvářet hypotézy, zdůvodňovat jejich pravdivost, vyvracet nesprávná tvrzení, dále zdůvodňovat svůj postup a ověřovat správnost řešení problémů.

Tyto schopnosti mohou být procvičovány v rámci provádění adekvátně obtížných matematických důkazů jako např. dokazovat, kolik existuje pravidelných nebo periodických teselací tvořených pravidelnými n -úhelníky, kde si žák musí sám promyslet, jak bude při důkazu postupovat a odůvodnit svůj postup za podpory vhodných argumentů. Jiná varianta úlohy by pak byla, kolik typů vertexu jsme schopni sestavit z daných pravidelných n -úhelníků, což by vedlo na kombinatorickou úlohu využívající variace, které se taktéž nachází v RVP mezi učivem probíraným v rámci kombinatoriky.

Dále je asi nepřekvapivé, že teselace můžeme využívat při splňování očekávaných výstupů a probírání učiva z kategorie geometrie, tj. geometrie v rovině a v prostoru. Těmito výstupy jsou používání geometrických pojmů, zdůvodňování a využívání geometrických útvarů v rovině a v prostoru, třídění útvarů na základě jejich vlastností, využívání náčrtku při řešení problémů nebo řešení planimetrických a stereometrických problémů motivovaných praxí. Příkladem takové aktivity může, kromě již zmíněných důkazových úloh, být samotná tvorba teselace ať už z matematicko-geometrického úhlu pohledu nebo i v rámci výtvarné výchovy. Příkladem takové aktivity je tvorba escherovských teselací (např. jako návrh dekorativní tapety na zeď), kde by bylo třeba využít kromě kreativního myšlení a jakéhosi

náčrtku pro přiblížení řešení úkolu i samotné geometrické konstrukce, která by zajistila symetrii výtvaru.

Se stále se zvyšující poptávkou po schopnostech pracovat s digitálními nástroji, je možné teselace využít i pro zpestření výuky informatiky a naplnit tak požadavky RVP, aby žák ovládal a propojoval dostupné prostředky ICT (možnost tvořit model prostorové teselace – rozvoj modelování a 3D tisku, který stoupá na popularitě, je stále používanější a na mnohých gymnáziích už jsou 3D tiskárny k dispozici při výuce).

4.2 Teselace v RVP pro obor vzdělávání Stavebnictví

Na průmyslových školách se kromě již zmíněných aktivit a souvislostí ještě nabízí zmínit další využití teselací v návaznosti na RVP, které je o něco detailnější než RVP pro gymnázia. Teselace je zřejmě možné využít v rámci výuky podobných a shodných zobrazení v rovině. Dále v rámci grafické a estetické přípravy, a to konkrétně v deskriptivní geometrii, kde by bylo možné v rámci rysů (např. v kosoúhlém promítání) zadat zobrazení rovinné teselace představující ozdobnou dlažbu. Další využití by se dalo nalézt při řešení fasád a obkladů budov. Tyto úlohy kromě učiva trénují motoriku a preciznost žáka, která je při technickém zobrazování třeba.

4.3 Konkluze

Teselace má potenciál stát se jakýmsi prostředkem pro zpestření, motivaci a názornost nejen v hodinách matematiky, ale i výtvarné výchovy, informatiky, deskriptivní geometrie nebo i biologie, kde mnoho struktur tkání nápadně připomíná teselace rovinné (např. jednovrstvá tkáň ve vlasečnicích) nebo prostorové (např. jaterní tkáň), kde buněčná stavba je také součástí RVP.

Vybrané aktivity nastíněné v této sekci jsou dále popsány v kapitolách 5 a 6.

Aktivity v následujících kapitolách byly vytvořeny se záměrem jejich zakomponování do hodin na střední škole. Jak již bylo nejménou naznačeno, tato práce se nesoustředí pouze na aktivity využívající teselace v rámci hodin matematiky, ale představuje i aktivity mezipředmětové, kde se teselace využívají v rámci dalších předmětů. Proto bude tato práce následně rozdělena na aktivity do hodin matematiky a aktivity mezipředmětové, které jsou zamýšleny do výuky ostatních předmětů nebo se mohou stát součástí projektové výuky. V textu práce budou aktivity zpracovány a okomentovány s návrhem, jak by mohly být zařazeny do hodin na základě učebnic a osnov daných předmětů. Samotné zadání úloh, které je možné využít ve výuce naleznete v příloze.

Kapitola 5

Aktivity do hodin matematiky

V následující kapitole je představeno 6 aktivit vhodných do hodin matematiky na SŠ. Každá z vytvořených aktivit obsahuje kromě zadání se vzorovým možným řešením i komentář a motivaci.

5.1 Důkazová úloha – Existují 3 pravidelné teselace

Komentář a motivace

Z vlastní zkušenosti mohu říci, že provádět důkazy tvrzení není na střední škole tak úplně běžné. Matematické důkazy jsou přesto zásadní součástí matematiky a měla by se jim věnovat patřičná pozornost. Důkaz o existenci právě tří pravidelných teselací využívá jednoduchých konceptů, a proto je vhodný k trénování korektnosti zápisu matematického důkazu, jelikož žáci nemusí věnovat veškerou kapacitu myšlenkovým pochodům, ale mohou se soustředit i na samotnou strukturu důkazu. Předpokladem zvládnutí úlohy je znalost pojmu pravidelná teselace a základních vlastností úhlů.

Řešená úloha

Zadání: Dokažte, že existují právě tři pravidelné teselace.

Vzorové řešení:

Nejprve je třeba si promyslet, co to taková pravidelná teselace vlastně je. Jedná se o teselaci s jednou základní dlaždicí, kterou je pravidelný n -úhelník, všechny vertexy jsou stejného typu a jedná se o teselaci typu strana ke straně.

Aby byly tyto vlastnosti teselace dodrženy, je nutné, aby součet vnitřních úhlů dlaždic jednoho vertexu byl 360° . Vzhledem k tomu, že máme k dispozici pouze jeden prototvar, který má všechny vnitřní úhly stejně velké, je tak nutná a dostatečná podmínka, aby velikost vnitřního úhlu dlaždice dělila 360° . Chceme tedy ukázat, že podmínku dělitelnosti splňují právě 3 pravidelné n -úhelníky a žádný další.

Začneme vyjádřením velikosti vnitřního úhlu pravidelného n -úhelníku podle obrázku 5.1. Rozdělíme n -úhelník na n rovnoramenných trojúhelníků (základna je tvořena stranou n -úhelníku a třetí vrchol je střed n -úhelníku). Každý z těchto trojúhelníků má úhel

u vrcholu S roven $\frac{360^\circ}{n}$. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° . Označme velikost zbylých dvou úhlů trojúhelníku β . Potom platí

$$2\beta + \frac{360^\circ}{n} = 180^\circ.$$

Odtud

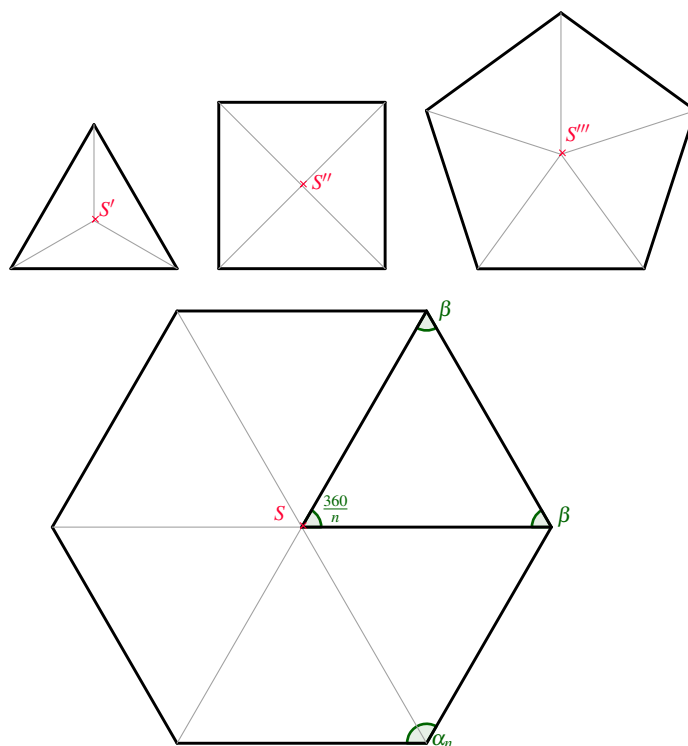
$$2\beta = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

$$\beta = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2}.$$

Vnitřní úhel pravidelného n -úhelníku α_n je tvořen dvěma těmito úhly, tzn.

$$\alpha_n = 2\beta = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

kde $n \geq 3$.



Obrázek 5.1: Odvození vzorce pro vnitřní úhel pravidelného n -úhelníku

Nyní už jen zbývá ukázat, které z možných hodnot α splňují podmínku, že dělí 360° . Je zřejmé, že hodnoty α_n se se zvyšujícím n také zvětšují. Nejmenší možná hodnota α_n pro $n = 3$ je 60° , což splňuje požadovanou podmínku. Dělitelé 360 větší než 60 jsou 72, 90, 120, 180 a 360. Rovnice

$$72^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

nemá řešení pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Dále z rovnice

$$90^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

dostáváme řešení $n = 4$, z rovnice

$$120^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

dostáváme řešení $n = 6$, rovnice

$$180^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

nemá řešení a nakonec situace, kdy by se α_n mělo rovnat 360° , zřejmě nemůže nastat.

Dokázali jsme tedy, že pravidelné teselace jsou právě tři, a to tvořené rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem a pravidelným šestiúhelníkem.

5.2 Které mnohoúhelníky teselují a proč

Komentář a motivace

Tato úloha je tvořena za účelem aplikování vědomostí o vlastnostech mnohoúhelníků. Je možno ji řešit pouze teoreticky pomocí náčrtků nebo poskytnout žákům vystřižené mnohoúhelníky, na kterých si budou moci zkusit teselace přímo poskládat. Úloha je tedy vhodná k zařazení do kapitoly planimetrie, konkrétně geometrické útvary v rovině, které se obvykle vyučují v prvním ročníku střední školy. Předpokládané znalosti pro kompletní vyřešení úlohy jsou kromě učiva ze základní školy vlastnosti mnohoúhelníků a obsahy geometrických útvarů

Úloha je rovnou formulována s motivací a pozadím problému, kterým se žákům přibližuje odpověď na častou otázku „Proč to děláme?“. Dále je možné úlohu gradovat tím, že místo vybírání pouze jednoho tvaru dlaždice chceme vybrat 2, a to za stanovených podmínek, kromě toho můžeme úlohu rozšířit i praktickými otázkami jako jsou např. otázky *d.* a *e.* Zadání úlohy k využití ve výuce je k nalezení v příloze (str. 77).

Řešená úloha

Zadání: Rekonstruuje dům a právě vybíráte kachličky do koupelny, kterými vydláždíte podlahu o rozměrech $2\text{ m} \times 3\text{ m}$. Ačkoliv je zvykem, že se kachle prodávají buďto po metrech

čtverečních nebo po balení, rozhodli jste se pro ručně malované ozdobné kachle, které se prodávají po kusech.

V obchodě s ozdobnými kachlemi nabízejí následující tvary kachlí:

- čtverec o straně 20 cm za 66 Kč/kus,
 - čtverec o straně 10 cm za 18 Kč/kus,
 - pravidelný pětiúhelník o straně 10 cm za 45 Kč/kus,
 - kosočtverec o straně 15 cm a výšce 12 cm za 38 Kč/kus,
 - pravidelný šestiúhelník o straně 12 cm za 90 Kč/kus,
 - rovnostranný trojúhelník o straně 12 cm za 21 Kč/kus,
 - pravidelný dvanáctiúhelník o straně 10 cm za 235 Kč/kus.
- a. Ze kterých kachlí a proč můžeme vybírat, přejeme-li si celou podlahu vydláždit dlaždicemi jednoho tvaru (pomineme-li nutnost zaříznout krajní kachle dle potřeby)?
- b. Který tvar bychom měli zvolit, přejeme-li si zvolit co nejlevnější variantu?

Bonusové otázky:

- c. Jakou dvojici kachlí můžeme zvolit, jestliže si přejeme na podlahu využít právě dva různé tvary dlaždic opakující se v periodickém vzoru (vyskládané stylem strana ke straně)? Vyskládání načrtněte.
- d. Co vše může ovlivňovat cenu kachlí? Proč cena přímo neodráží velikost kachle?
- e. Jak velké množství kachliček je vhodné koupit jako rezervu?

Vzorové řešení: Podlaha má rozměry $2\text{ m} \times 3\text{ m}$, tedy

$$S = 6\text{ m}^2 = 60\,000\text{ cm}^2.$$

a. Vhodný výběr dlaždic

Můžeme vybírat z kachlí tvaru **čtverce**, **kosočverce**, **pravidelného šestiúhelníku** nebo **rovnostranného trojúhelníku**, jelikož to jsou jediné čtyři tvary kachlí, které jsou schopny samy o sobě teselovat. V případě čtverce, trojúhelníku a šestiúhelníku by se jednalo o pravidelné teselace, kde je jejich teselování zaručeno tím, že velikost jejich vnitřního úhlu dělí plný úhel, na rozdíl od pravidelného pětiúhelníku a dvanáctiúhelníku.

- **Čtverec:** vnitřní úhel 90° , $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow$ lze použít
- **Pravidelný pětiúhelník:** 108° , $360/108 \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ nelze použít
- **Pravidelný šestiúhelník:** 120° , $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ \Rightarrow$ lze použít

- **Pravidelný dvanáctiúhelník:** 150° , $360/150 \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ nelze použít
- **Rovnostranný trojúhelník:** 60° , $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow$ lze použít

Kdežto v případě kosočtverce, který je v úloze jediný nepravidelný n -úhelník, se bude jednat o periodickou teselaci s jednou základní dlaždicí tj. je to teselace monohedrál ní (tento pojem je nad rámec očekávaného řešení úlohy). Kosočverec teseluje, jelikož složením jeho úhlů u sousedních vrcholů dostáváme úhel přímý, který pak dělí plný úhel, a tak je kosočverec teselující útvar.

b. Nejlevnější varianta

Pro tento úkol budeme postupovat následujícím způsobem. Nejprve vypočteme obsah každé z kachlí, následně vydělíme podlahovou plochu koupelny obsahem jedné kachle a získáme odhad toho, kolik kachlí budeme potřebovat, následně uvážíme rezervy a kachle zařezané na okrajích místnosti, bude-li to třeba. Písmenem n je ve výpočtu označen počet kachlí.

- **Čtverec 20×20 cm**

$$S = 400 \text{ cm}^2, \quad n = 150, \quad \text{cena} = 9900 \text{ Kč}$$

- **Čtverec 10×10 cm**

$$S = 100 \text{ cm}^2, \quad n = 600, \quad \text{cena} = 10800 \text{ Kč}$$

- **Kosočtverec**

Obsah kosočtverce počítáme

$$S = a \cdot v,$$

kde a je strana a v výška na tuto stranu.

Pro $a = 15$ cm a $v = 12$ cm se

$$S = 15 \cdot 12 = 180 \text{ cm}^2,$$

$$n = \frac{60000}{180} \approx 334, \quad \text{cena} \approx 334 \cdot 38 \approx 12692 \text{ Kč}.$$

- **Rovnostranný trojúhelník ($a = 12$ cm)**

Výšku trojúhelníku určíme pomocí Pythagorovy věty:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

Obsah:

$$S = \frac{1}{2}av = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3} \cdot \frac{144}{4} \approx 62 \text{ cm}^2$$

$$n \approx 968, \quad \text{cena} \approx 20328 \text{ Kč}$$

c. **Pravidelný šestiúhelník** ($a = 12$ cm)

Šestiúhelník rozdělíme na 6 rovnostranných trojúhelníků jejichž obsah spočteme pomocí vzorce odvozeného výše (v rámci výpočtu obsahu rovnostranného trojúhelníku):

$$S_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Celkový obsah:

$$S = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

Dosadíme:

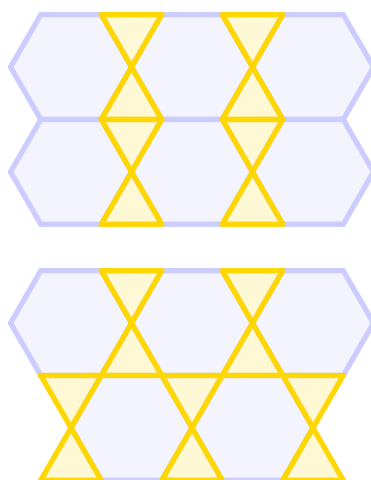
$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 144 \approx 374 \text{ cm}^2$$

$$n \approx 160, \quad \text{cena} \approx 14400 \text{ Kč}$$

Vzhledem k poměrně velkým rozdílům cen již bez zohlednění rezervy můžeme říci, že nejlevnější možností bude jednoznačně varianta čtverce 20×20 cm.

Bonusové otázky:c. **Dvojce kachlí**

Jelikož se má jednat stále o teselace typu strana ke straně, můžeme uvažovat pouze dvojce kachlí o stejné délce strany. Pro kachle o straně 10 cm nemá smysl uvažovat žádnou z možných dvojic, jelikož by žádná z dvojic nebyla schopna teselovat. Jediná dvojce, kterou má tak smysl uvažovat je šestiúhelník a trojúhelník, a to následujícími možnými způsoby:



Obrázek 5.2: Možná dvojice kachlí do koupelny

d. Faktory ovlivňující cenu kachlí

Cena kachlí nezávisí pouze na jejich velikosti (obsahu), ale i na dalších faktorech, např.

- náročnost výroby (ruční malba, detail vzoru),
- tvar kachle (složitější tvary jsou výrobně náročnější),
- čas potřebný k výrobě,
- použitý materiál a technologie výpalu,
- množství odpadu při výrobě (zmetkovitost),
- exkluzivita nebo umělecká hodnota produktu,

proto může být menší kachle dražší než větší, pokud je její výroba složitější.

e. Rezerva

Při nákupu kachlí je vhodné počítat s rezervou kvůli

- prořezům na okrajích,
- případnému poškození při pokládce,
- budoucím opravám.

Doporučená rezerva uváděná prodejci:

- 5 % pro jednoduché tvary (např. čtverce),
- 15 % pro složitější vzory a větší plochy,
- až 25 % pro kombinace více tvarů nebo komplikované vzory.

5.3 Popis symetrií v teselacích

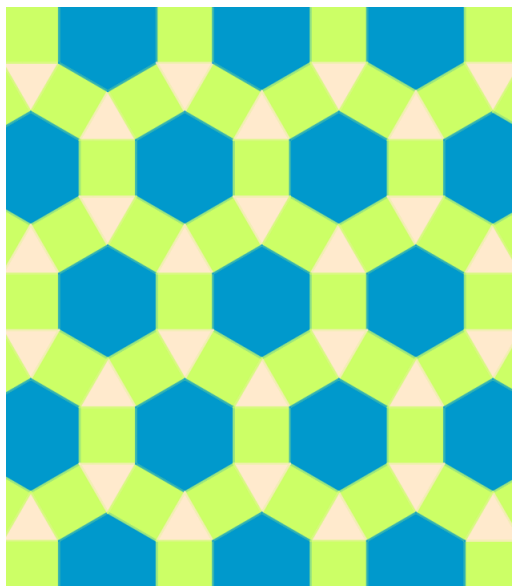
Komentář a motivace

Následující úloha vznikla za účelem procvičení žákovské schopnosti analyzovat symetrie v rovině. Úloha je zamýšlena k zařazení do výuky zobrazení v rovině, kde buďto je možné žákům zadat popis jednotlivých zobrazení v rovině (např. v následujících teselacích vyznačte všechny osy symetrie nebo středové symetrie) nebo jako náročnější úkol, a to vyznačení všech zobrazení, které v teselaci můžeme najít nebo najít určitý počet zobrazení. Úlohu je proto vhodné zařadit buďto v brzkých fázích učení jakožto trénování analyzování látky před samotným použitím (podle Bloomovy taxonomie) nebo jako procvičení všech již dříve probraných zobrazení najednou. Zadání úlohy je v příloze (str. 78).

Řešená úloha

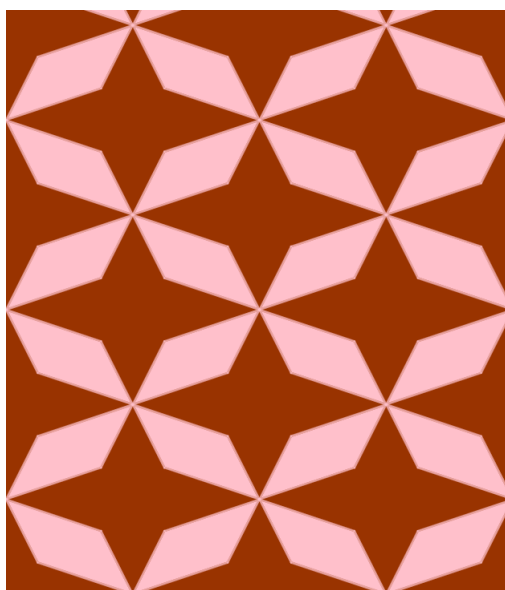
Zadání: V následujících ukázkách teselací najděte a popište všechna rovinná zobrazení pro alespoň jednu periodu:

a.



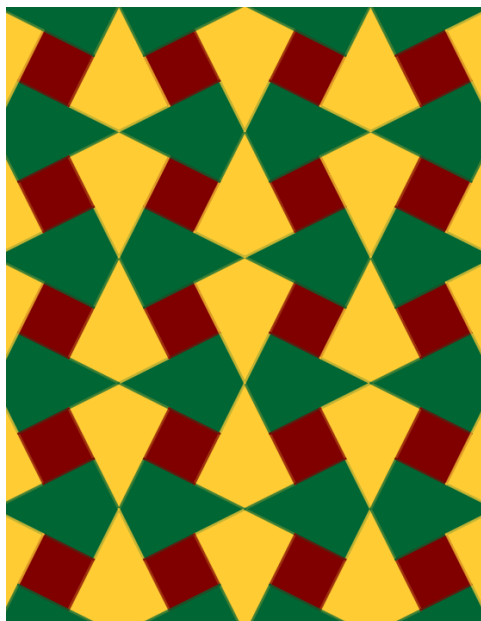
Obrázek 5.3: Teselace a.

b.



Obrázek 5.4: Teselace b.

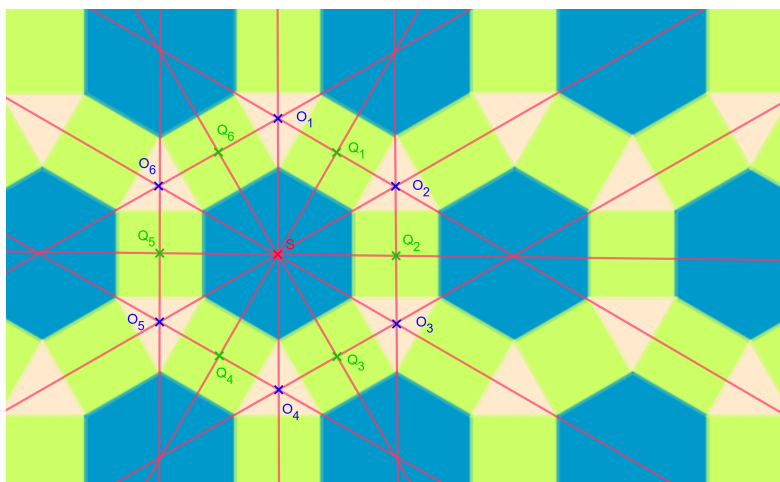
c.



Obrázek 5.5: Teselace c.

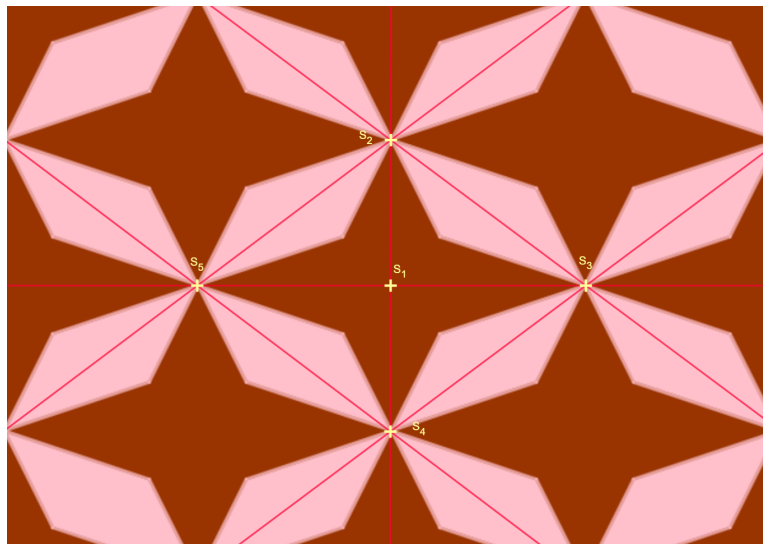
Vzorové řešení:

- a. Červené přímky jsou osy symetrie teselace, modré body $O_1 - O_6$ jsou středy otočení o 90° a zároveň středy symetrie, modré body $Q_1 - Q_6$ jsou středy otočení o 120° , červený bod S je středem otočení o 60° a také zároveň středem symetrie.



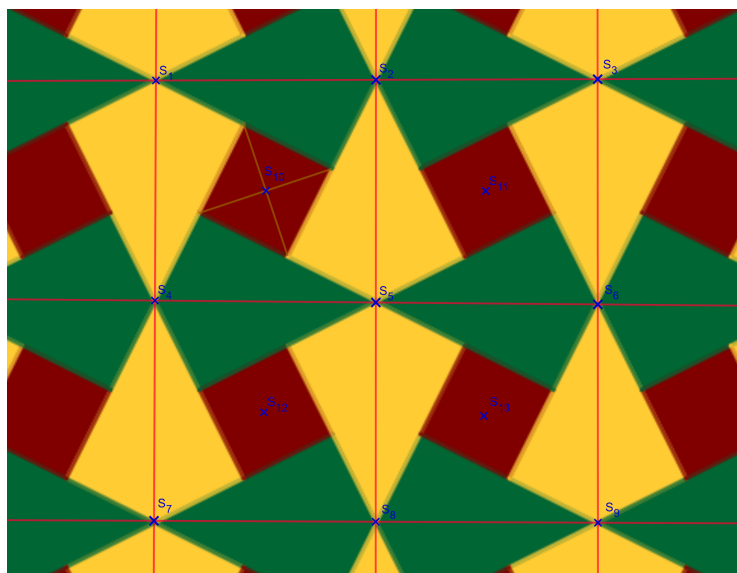
Obrázek 5.6: Řešení – teselace a.

- b. Červené přímky opět značí osy symetrie a žluté body $S_1 - S_5$ značí středy symetrie.



Obrázek 5.7: Řešení – teselace b.

- c. Červené přímky opět značí osy symetrie a modré body $S_1 - S_{13}$ značí středy symetrie, kde body $S_{10} - S_{13}$ jsou středy červených čtverců v teselaci.



Obrázek 5.8: Řešení – teselace c.

5.4 Popis teselací pomocí vektorů

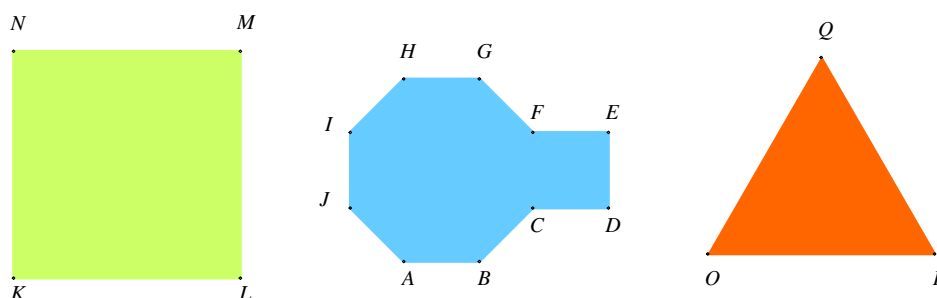
Komentář a motivace

Ačkoliv může následující úloha působit příliš jednoduše, je koncipována jako časově nenáročné ověření, že žáci porozuměli co je to vektor a jak jej popisujeme, i že rozumí konceptu nezávislosti dvou vektorů. Z pozice učitele by se v této úloze vybízelo pokusit se žáky natchytat na otázce, proč nemohou být odpovědi dva navzájem opačné vektory. Před samotným zadáním úlohy je na místě ještě žákům objasnit termín *vektor generující teselaci*. Pro rovinnou teselaci se jedná o vektory v_1, v_2 určující směr a velikost posunutí, kterými se základní tvar opakuje. Jinak řečeno, hledáme dva vektory takové, že složíme-li je n -krát, kde $n \in \mathbb{N}$, přesuneme jednu základní kachli na kteroukoliv jinou. Zadání úlohy vhodné k použití v hodině je k nalezení v příloze (str. 80).

Řešená úloha

Zadání: Najděte vektory generující teselace daných dlaždic.

- Jsou nalezené vektory lineárně závislé nebo nezávislé? Bylo by možné najít závislé vektory generující rovinnou teselaci?
- Kolik vektorů je třeba pro generování rovinné teselace?
- Kolik vektorů by bylo třeba pro generování prostorové teselace?



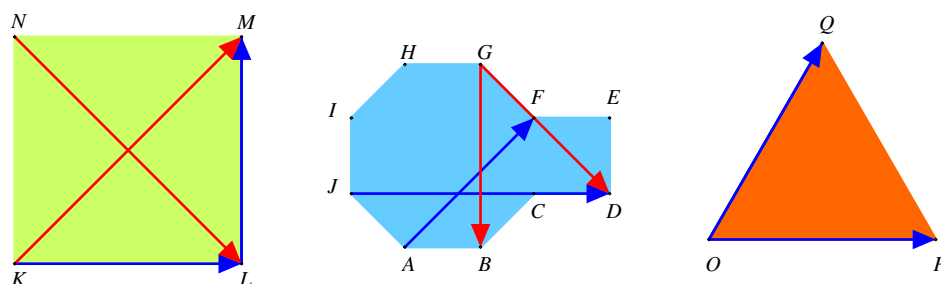
Obrázek 5.9: Prototypy

Vzorové řešení:

Pro čtverec $KLMN$ jsou dvě z mnoha možných řešení např. vektory $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{LM}$ nebo vektory $\overrightarrow{NL}$, $\overrightarrow{KM}$.

Pro desetiúhelník $ABCDEFGHIJ$ jsou možnými řešeními například dvojice vektorů $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$ nebo $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GD}$.

Pro trojúhelník OPQ je možným řešením dvojice vektorů $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP}$.



Obrázek 5.10: Prototypy s vyznačenými vektory

- Vektory jsou vždy lineárně nezávislé, kdybychom zvolili lineárně závislé vektory, tak bude vektor generovat pouze pás teselace nikoliv celé pokrytí roviny.
- Vektory jsou třeba právě dva, jelikož se jedná o teselaci roviny.
- V tomto případě potřebujeme ještě přidat třetí směr, tedy vektory budou tři.

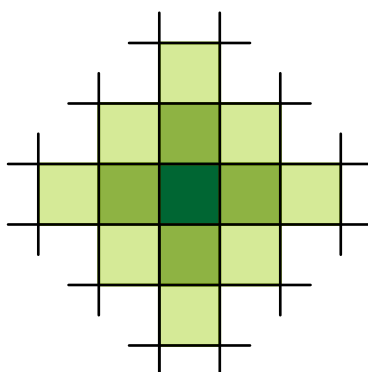
5.5 Posloupnosti – Po kolika dlaždice přibývají

Komentář a motivace

Další možností využití teselací ve výuce na střední škole je v rámci posloupností, kde by se jednalo o formálnější verzi úlohy, která se obvykle vyskytuje jako poslední v CERMAT testu z matematiky na přijímacích zkouškách na střední školu. Tedy jedná se o úlohu, kde je žákovi představena situace, kterou lze v teorii opakovat do nekonečna, např. skládání kostek vedle sebe dle daných pravidel nebo sázení květin v daném opakujícím se motivu atp. Jelikož jsou ale cílovou skupinou středoškoláci, můžeme si, kromě jakéhosi intuitivního využití posloupností pro získání odpovědi, dovolit věnovat se formálnímu popisu posloupností. Posloupnosti se obvykle probírají v maturitním ročníku, předpoklady pro zvládnutí úlohy jsou základní znalosti o posloupnostech a jejich zadávání pomocí vzorce pro n -tý člen i rekurentně. Zadání je k nalezení v příloze (str. 81).

Řešená úloha

Zadání: Dláždíte rovinu, jako první položíte jednu čtvercovou dlaždici (nejtmavší na obrázku), v každém dalším kroku přidáte ke každé krajní straně další dlaždici. Svůj postup stále opakuje, jako je naznačeno na obrázku. Určete vzorec pro n -tý člen posloupnosti (tj. posloupnost počtů nově přibylých kachlí) nejprve rekurentně, a pak i explicitně. První členy posloupnosti jsou podle obrázku $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$.



Obrázek 5.11: Demonstrační obrázek k úloze o posloupnostech

Vzorové řešení:

Zadaná posloupnost udává počty nově přidaných dlaždic,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8.$$

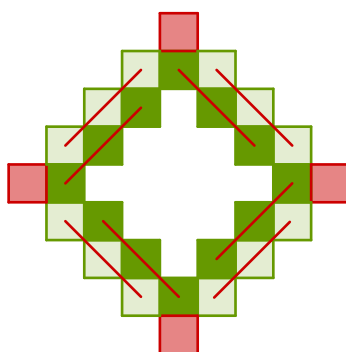
Z obrázku dále můžeme odvodit,

$$a_4 = 12, \quad a_5 = 16, \dots$$

Pro členy od a_2 dále platí, že rozdíl dvou po sobě jdoucích členů je konstantní.

$$a_3 - a_2 = 4, \quad a_4 - a_3 = 4, \dots$$

Od druhého členu tedy jde o aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 4$ (viz obr. 5.12).



Obrázek 5.12: Vizualní podpora řešení úlohy o posloupnostech

Rekurentní vyjádření

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 4,$$

$$a_n = a_{n-1} + 4 \quad \text{pro } n \geq 3.$$

Explicitní vzorec (naznačeno v obrázku)Pro $n \geq 2$ platí

$$a_n = 4(n - 1).$$

Celkově tedy

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 4(n - 1) & \text{pro } n \geq 2. \end{cases}$$

5.6 Kombinatorika – Typy vertexů

Komentář a motivace

Představíme-li žákům pojem vertex, je krásně využitelná následující úloha, spadající do učiva kombinatoriky, kde se jedná konkrétně o variace s opakováním. Variace s opakováním sice nejsou nezbytnou součástí učiva střední školy, ale přesto se s nimi můžeme setkat, proto jsem se rozhodla úlohu zařadit ve znění s možným opakováním. Nebyl by ovšem problém úlohu pozměnit tak, že každou dlaždici můžeme použít pouze jednou a převézt ji tak do úloh o variacích bez opakování. Dále je možné úlohu upravovat v omezení n -úhelníků, v práci je úloha prezentována s omezením na nejvýše 12-tiúhelník, ale je možné ji zjednodušit zpřísněním tohoto omezení nebo naopak udělat náročnější odstraněním omezení, kde by pak závěrem úlohy byl přehled všech 21 vertexů jako na obrázku 2.6. Zadání úlohy je k nalezení v příloze (str. 82).

Řešená úloha

Zadání: Kolik je možné vytvořit typů vertexů za použití pouze pravidelných n -úhelníků (mohou se opakovat), kde n je nejvýše 12? Své tvrzení odůvodněte.

Nápověda 1: Zamyslete se, jak zjistíme velikosti vnitřních úhlů pravidelných n -úhelníků.

Nápověda 2: Jakou kombinací vnitřních úhlů dostaneme součet 360° ?

Nápověda 3: Záleží na uspořádání n -úhelníků?

Vzorové řešení:

Vertex je bod, ve kterém se potkávají alespoň 3 dlaždice teselace, kde součet vnitřních úhlů dlaždic jednoho vertexu je 360° . Ze zadání víme, že máme pracovat s vertexy složenými z kachlí tvarů pravidelných n -úhelníků. Hledáme tedy takové skupiny pravidelných n -úhelníků, jejichž vnitřní úhly jsou v součtu 360° . Kromě toho musíme ještě uvážit, že změníme-li uspořádání kachlí vertexu, změní se tak jeho typ (různé kachle stejného druhu však nerozlišujeme). Začneme tedy tím, že si vypíšeme hodnoty vnitřních úhlů n -úhelníků, ze kterých pak budeme skládat vertexy. Pro vnitřní úhel n -úhelníku platí (odvozeno v 5.1)

$$\alpha_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

n	Název	Vnitřní úhel jednoho vrcholu
3	trojúhelník	60°
4	čtverec	90°
5	pětiúhelník	108°
6	šestiúhelník	120°
7	sedmiúhelník	$\frac{900^\circ}{7}$
8	osmiúhelník	135°
9	devítiúhelník	140°
10	desetiúhelník	144°
11	jedenáctiúhelník	$\frac{1620^\circ}{11}$
12	dvanáctiúhelník	150°

Na první pohled je zřejmé, že jedenáctiúhelník ani sedmiúhelník se v námi hledanými vertexy nebudou vyskytovat. Nejmenší možný úhel α je 60° , z toho plyne, že ve vertexu se může potkávat maximálně 6 dlaždic. Naopak minimum dlaždic potkávajících se ve vertexu je z definice 3. Hledáme tedy všechny možnosti, jak 360 rozdělit na 3-6 sčítanců z tabulky.

Začneme tedy systematicky od nejmenšího počtu kachlí:

$$360 = 120 + 120 + 120$$

$$360 = 135 + 135 + 90$$

$$360 = 144 + 108 + 108$$

$$360 = 150 + 150 + 60$$

$$360 = 150 + 120 + 90$$

Nyní se podíváme na vertexy stupně 4:

$$360 = 60 + 60 + 120 + 120 \quad 360 = 60 + 120 + 60 + 120$$

$$360 = 60 + 90 + 90 + 120 \quad 360 = 60 + 90 + 120 + 90$$

$$360 = 90 + 90 + 90 + 90$$

$$360 = 60 + 60 + 90 + 150 \quad 360 = 60 + 90 + 60 + 150$$

Vertexy stupně 5:

$$360 = 60 + 60 + 60 + 60 + 120$$

$$360 = 60 + 60 + 60 + 90 + 90 \quad 360 = 60 + 60 + 90 + 60 + 90$$

A nakonec jediný možný vertex stupně 6:

$$360 = 60 + 60 + 60 + 60 + 60 + 60$$

V přehledu jsou hvězdičkami (*) označeny ty rozklady, u kterých změnou pořadí sčítanců změníme typ vertexu, jak je vždy dále rozepsáno. Můžeme tedy říci, že z pravidelných n -úhelníků, kde n je nejvýše 12, jsme schopni vyskládat 16 typů vertexů (můžeme vidět i na obrázku 2.6).

Kapitola 6

Mezipředmětové aktivity

6.1 Výtvarná výchova

Vzhledem k volnějšímu duchu výuky výtvarné výchovy, jsem se v sekci úloh do výtvarné výchovy rozhodla neformulovat striktně daná zadání. Pouze představuji návrhy aktivit se vzorovým splněním úkolů, které je možné do výuky zařadit. Aktivity vznikaly na základě mých zkušeností s výukou na SŠ.

6.1.1 Tvorba ozdobného pásu kachlí

Komentář a motivace

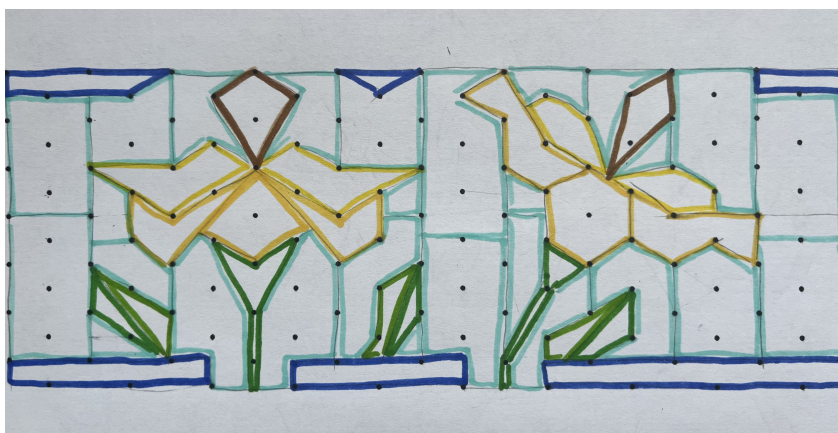
Následující úloha patří mezi ty časově méně náročné z této sekce, jedná se o tvorbu ozdobného pásu kachlí, který si může žák představit jako designový prvek do koupelny či kuchyně. Představitosti se meze nekladou, a proto je na každém, jak volné nebo konkrétní zadání úlohy bude. Mohli bychom zadat styl, kterému se mají žáci věnovat nebo jim nechat úplně volnou ruku. Zadáním úlohy by tak mohla být např. tvorba ozdobného pásu do koupelny, majitel koupelny by si přál vyskládat pás z různobarevných kachlí s květinovým motivem. Je důležité žákům zdůraznit, že pás má mít periodicky se opakující vzor kachlí, aby bylo možné pás dle potřeby prodloužit nebo zkrátit. Při návrhu mohou zanedbávat tloušťku spár, mezi kachličkami a návrh kreslit na papír a nebo vyskládat z barevných papírů. V práci je zdokumentováno řešení, kde je motiv pásu prvně nakreslen na papír a následně pak vyskládán barevnými papíry. Tento postup je příjemný, jelikož je jednoduché vystříhnout najednou více papírových kachlí, než tu stejnou kachli překreslovat na papír několikrát. Další faktor, který by měl být při zadávání úkolu zmíněn je, že by se pás neměl skládat z příliš mnoha druhů kachliček, aby nebylo komplikované jej pak vyrobit a instalovat do koupelny. Dalším pomocníkem může být jako v mém řešení síť bodů, díky kterým je snadnější se držet pro kachličky praktických neobklých tvarů. Pomocí sítě jsem si nejdříve navrhla design, který jsem následně tvořila z papíru. Tato síť je k nalezení v přílohách.

Ve výuce bychom mohli aktivitu zařadit k umění a architektuře 19.–20. století jako převzetí mozaikování ze secesní architektury do domovů. Inspirací žákům může být např. práce Antoni Gaudiho (viz obr. 6.1).

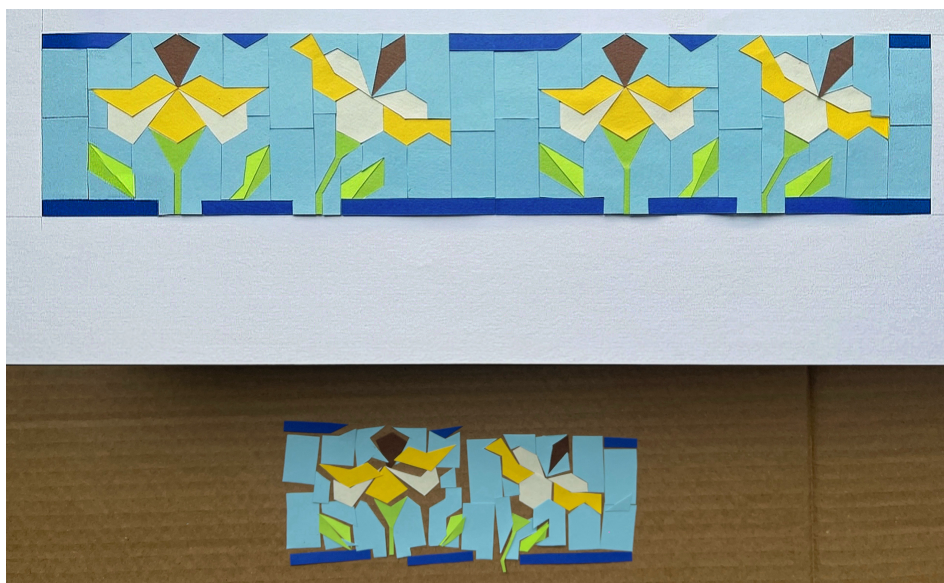


Obrázek 6.1: Ukázka Gaudiho užití mozaiky [15]

Vzorové splnění úkolu



Obrázek 6.2: Tvorba ozdobného pásu v pomocné síti

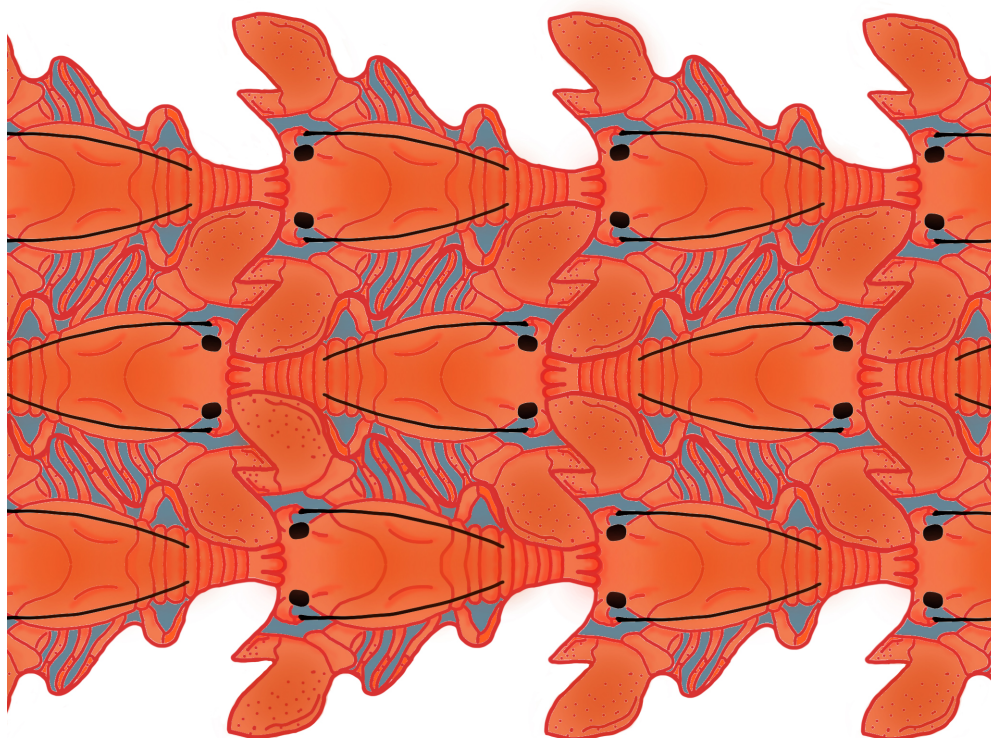


Obrázek 6.3: Ukázka ozdobného pásu

6.1.2 Tvorba escherovských teselací

Komentář a motivace

Na rozdíl od předchozí úlohy, je tato značně konkrétnější, jelikož Mauritz Cornelis Escher je významným umělcem 20. století a ve výtvarné výchově bývá obvykle zmiňován. Je znám především díky vyobrazování paradoxů perspektivního kreslení a právě teselacím. Escherovy teselace jsou speciální neobvyklými tvary připomínajícími zvířata či lidi. Proto by se v rámci výkladu o Escherovi jakožto významném umělci hodilo dát žákům příležitost vytvořit teselaci inspirovanou Escherovým dílem. Jedná se o nelehký úkol, k jehož zvládnutí je kromě představivosti a kreativity třeba znát i základy geometrie ležící za teselacemi. Proto by bylo vhodné žákům nejdříve představit jakýsi návod na tvorbu escherovských teselací jako je popsáno v 3.3. Na základě toho by pak žáci měli být schopni vytvořit obdobné dílo. Opět je na učiteli o tom rozhodnout, zda tvar kachle pouze navrhnout, nakreslit část teselace, nebo kachle vystříhovat z papíru. Mně se osvědčila práce ve volně dostupné aplikaci Adobe Fresco, kterou jsem použila během tvorby této teselace i teselace v následující úloze.

Vzorové splnění úkolu

Obrázek 6.4: Ukázka vytvořené escherovské teselace

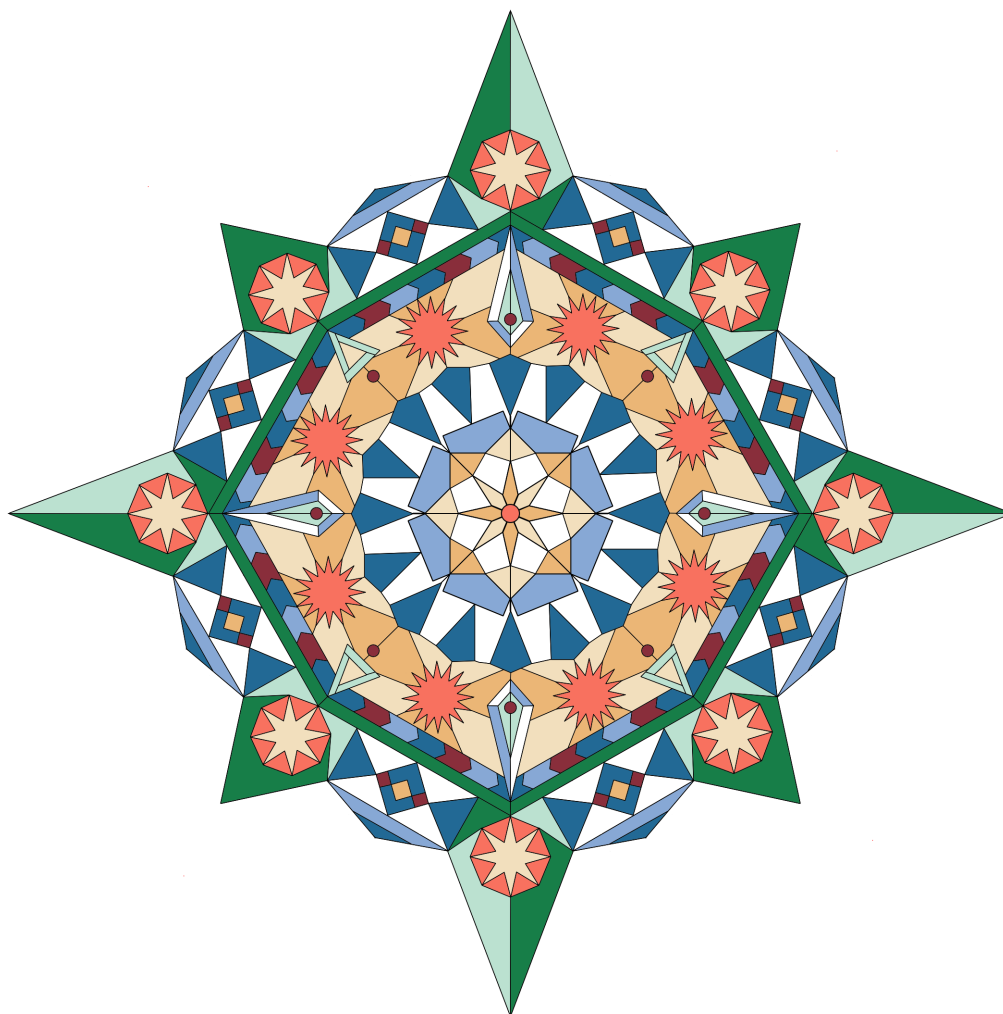
6.1.3 Islámské ornamenty**Komentář a motivace**

Součástí výtvarné výchovy je probírat umění různých kultur. Mozaiky a ozdobné kachličky jsou neodmyslitelnou součástí islámské kultury a architektury. Za zmínku jednoznačně stojí palác Alhambra v Granadě, který byl na území dnešního Španělska vystavěn během 13.–14. století jako královská rezidence. V rámci výtvarné výchovy by tak mohla být tato stavba představena a následně by žáci tvořili obdobné ornamenty s využitím typických prvků těchto teselací, tj. hvězdovitých tvarů. Žáci se mohou inspirovat fotografiemi architektury a vytvořit vzor podlahy podobný jako je na obrázku 1.4. Druhou a troufnu si říct zajímavější možností je zadat žákům tvorbu teselace situované kružnicově podobně jako na obrázku 6.5, se kterou se v islámské kultuře setkáváme velmi často.



Obrázek 6.5: Ukázka islámské mozaiky situované kružnicově [16]

Vzorové splnění úkolu



Obrázek 6.6: Ukázka vytvořené islámské teselace

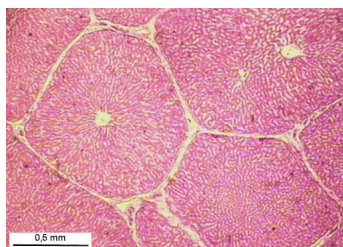
6.2 Biologie

Nejprve bych ráda okomentovala tvorbu úloh spojených s biologií, jelikož sama nejsem biologem, tak aktivity vznikaly za průběžného konzultování s absolventkami oboru Biologie se zaměřením na vzdělávání Bc. Adélou Pětivlasovou a Bc. Kateřinou Brodovou.

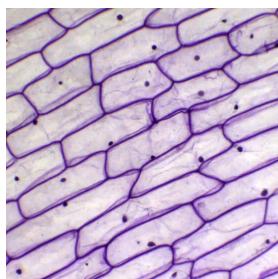
6.2.1 Teselace ve tkáních

Komentář a motivace

S teselacemi ať už rovinnými nebo prostorovými se můžeme nejednou setkat i v rámci biologie. Jedná se například o tkáň jater, která bývá často popisována jako pravidelná teselace šestiúhelníků (obr. 6.7) nebo epidermis cibule (obr. 6.8) či aerenchym (provzdušňovací pletivo) v rostlinách. V této úloze se žáci budou zabývat popisem modelů buněk, které teselují, a jejich odlišnosti od reality. Ačkoliv se v učebnicích představuje buňka jaterní tkáně jako šestiúhelníková a epidermická buňka cibule jako obdélníková, reálná situace je mnohem nepravidelnější. V úloze se tak zamyslíme nad tím, proč buňky popisujeme tímto způsobem a proč se popis liší od reality stvořené přírodou. Vzhledem k tomu, že jaterní buňku lze pod mikroskopem pozorovat pouze na některých školách jako stálý preparát (viz obr. 6.7), rozhodla jsem se do mé práce zvolit úlohu o epidermických buňkách cibule, ačkoliv o jaterní tkáni, by mohla aktivita vypadat obdobně.



Obrázek 6.7: Buňky jaterní tkáně pod mikroskopem [17]



Obrázek 6.8: Epidermis cibule pod mikroskopem [18]

Poměrně běžným biologickým laboratorním cvičením je pozorování epidermických buněk cibule pod mikroskopem, v rámci tohoto pozorování je možné zakomponovat okénko o tom, že se vlastně jedná o rovinnou teselaci, stejně jako u dalších tkání. Úkolem by pak bylo aproximovat opravdové pozorování pod mikroskopem teselací tvořenou jedním typem kachlí, jelikož epidermické buňky jsou také všechny stejného typu, tudíž je možné předpokládat, že mají všechny stejný tvar, ačkoliv tomu tak ve skutečnosti není. Polemizování nad tím, proč nevypadají všechny buňky stejně je součástí úkolu. Dále považuji za důležité žákům objasnit, že epidermické buňky tvoří prostorovou teselaci, ale jelikož je pozorujeme pod mikroskopem, přistupujeme k aktivitě tak, že teselací přibližujeme to, co vidíme pod mikroskopem a nikoliv tkáň samotnou. Celé zadání je k nalezení v příloze, kde se nachází protokol připravený k použití ve výuce (str. 84), řešená úloha níže je tedy vzorově vyplněný protokol.

Řešená úloha

Laboratorní protokol: Pozorování epidermických buněk cibule

Cíl práce

Pozorovat epidermické buňky cibule pod mikroskopem, identifikovat jejich struktury a vytvořit matematický model jejich uspořádání pomocí teselace.

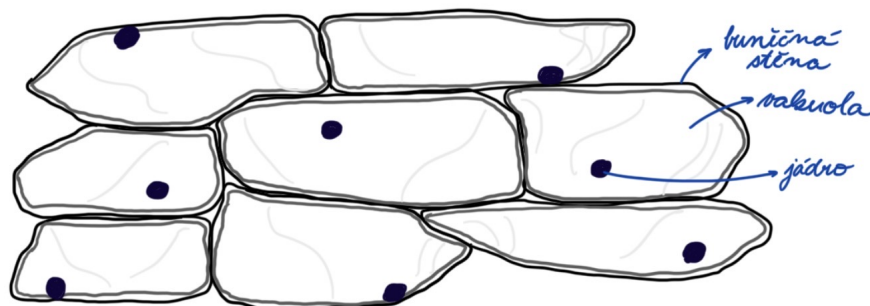
Pomůcky

cibule kuchyňská, pinzeta, preparační jehla, podložní a krycí sklíčko, kapátko, voda, mikroskop, papír, tužka (popř. pastelky), Lugolův roztok

Postup práce

1. Rozkroj cibuli a odděl jednu dužnatou vrstvu.
2. Pomocí pinzety opatrně sloupni tenkou blánu (epidermis) z vnitřní strany.
3. Přenes ji na podložní sklíčko.
4. Přidej kapku vody.
5. Volitelně přidej kapku Lugolova roztoku pro lepší viditelnost jádra.
6. Přikryj krycím sklíčkem (zešíkma, aby nevznikly bubliny).
7. Pozoruj preparát pod mikroskopem.

Nákres pozorovaných buněk včetně popisu buněčné stěny, jádra a vakuoly:



Obrázek 6.9: Nákres pozorovaných buněk

Otázky

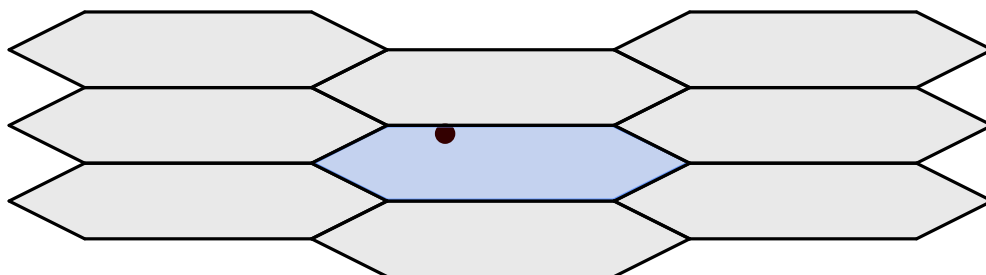
1. Jaký tvar mají buňky epidermis cibule? Jsou všechny stejné?
Buňky mají podlouhlý téměř až obdélníkový tvar s drobnými nepravidelnostmi, tvary jednotlivých buněk jsou podobné, ale nikoliv stejné.
2. Proč je vhodné použít barvivo? Co se změnilo po jeho použití?
Použitím barviva se lépe zviditelnila buněčná stěna a jádro buňky. Vzhledem k použití žluté cibule byl rozdíl viditelnosti razantní.

Teselace

Navrhni jeden základní tvar („kachličku“), který se bude opakovat, a vytvoř teselaci, která bude co nejlépe aproximovat uspořádání buněk.



Obrázek 6.10: Návrh kachle připomínající epidermickou buňku cibule

Náčrt teselace

Obrázek 6.11: Náčrt teselace připomínající epidermis cibule

Porovnání modelu s realitou

1. V čem se tvoje teselace podobá skutečným buňkám?

Buňky jsou podobné svým podlouhlým tvarem a na rozdíl od obdélníku mají, jak většina pozorovaných buněk, tak návrh teselace, dvě kratší strany obdélníku nahrazené křivkou.

2. V čem se liší?

Buňky teselace jsou všechny stejné, to se o reálných buňkách říci nedá. Některé z pozorovaných buněk mají téměř přesný obdélníkový tvar a jiné se obdélníku téměř vůbec nepodobají.

Diskuze

1. Proč nejsou buňky dokonale pravidelné jako teselace?

Pro přírodu je přirozené, že buňky nejsou dokonale pravidelné, jelikož se adaptují na prostředí.

2. Jaké faktory ovlivňují tvar a velikost buněk?

Na tvar reálných buněk má vliv několik různých faktorů, které jsou pro přírodu přirozené, tj. jednak množství vody a živin, ale i stáří jednotlivých buněk. Buňky rostou postupně, takže záleží na prostoru, který měla buňka během svého vývoje a na živinách, které se jí dostávaly.

3. Jaké jsou výhody a nevýhody použití matematického modelu (teselace) v biologii?

Výhody: zjednodušení složité reality, přiblížení a odhalení možných vzorců a pravidelností, možnosti matematické analýzy (výpočet ploch, obvodů a optimalizací), predikce modelování (např. jak se struktura změní při růstu)

Nevýhody: přílišné zjednodušení, ignorování biologických procesů, nezachycená variabilita, omezená použitelnost v praxi

Závěr

Při mikroskopickém pozorování epidermických buněk cibule obarvených Lugolovým roztokem byly jasně vidět jednotlivé rostlinné buňky. Barvení umožnilo zvýraznit buněčné stěny a v některých případech i buněčné jádro, čímž se zlepšila přehlednost preparátu. Buňky měly převážně protáhlý, mnohoúhelníkový tvar a byly uspořádány těsně vedle sebe, čímž vytvářely souvislou vrstvu.

Pozorovaná struktura připomínala pravidelné dlaždicové uspořádání, avšak jednotlivé buňky se lišily velikostí i tvarem, a proto nešlo o dokonale pravidelnou teselaci. Toto pozorování potvrzuje, že biologické struktury se sice mohou přibližovat matematickým modelům, ale v důsledku růstu a vzájemného působení buněk vykazují určitou nepravidelnost.

Celkově pozorování přispělo k lepšímu pochopení stavby rostlinné pokožky a ukázalo význam barvicích metod pro zvýraznění buněčných struktur.

6.2.2 Včelí plástve – Proč právě šestiúhelník**Komentář a motivace**

Včely jsou po staletí tvorové, kteří lidi fascinují pro svou pracovitost a organizaci. Otázkou proč mají včelí plástve tvar šestiúhelníku se zabýval už Johannes Kepler a rozhodně nebyl jediný, touto otázkou se zabývalo a stále zabývá nemálo přírodovědců.

Úlohu jsem se rozhodla zařadit, jelikož je pro biologii rozhodně relevantní a je velmi zajímavá, jelikož se jedná o lidstvu velmi dobře známou strukturu, ale málokdo tuší, kde se vlastně vzal její ikonický vzhled. Úloha je spíše námětem pro zamyšlení, proto v příloze není její jednoznačně dané zadání, ale uchopení úlohy je ponecháno na učiteli. Vzorové řešení úlohy představuje přehled očekávaných výstupů bádání.

Vzorové splnění úkolu

Zadání: Včelí plástve – Proč právě šestiúhelník?

Otázky k zamyšlení:

- Deformací jakého tvaru mohou šestiúhelníky vznikat?
- Proč nejsou komůrky kruhové?
- Co z něj dělá optimální tvar pro tvorbu plástve? V čem je pro včely výhodnější než trojúhelník nebo čtverec?

Vzorové řešení:

Na problematiku tohoto úkolu se běžně pohlíží dvěma způsoby, jednou z možností, jak může šestiúhelníkový tvar komůrek vznikat je, že včelky nemají za cíl stvořit šestiúhelníkovou strukturu, nýbrž vytvořit systém kruhových buněk. Ty jsou pro včely nejvýhodnějším řešením, co se spotřebovaného materiálu a prostoru v komůrce týče, kdybychom uvažovali stavbu pouze jedné cely nikoliv celého systému. Myšlenka je taková, že kruhové cely se následně deformují do tvaru šestiúhelníků. Tato deformace by v tomto případě byla způsobena vnějšími vlivy a manipulací včel s plástvemi. Je jasné, že kružnice není schopna

teselace, proto když vyskládáme kružnice jednu vedle druhé, je přirozené, že působením ostatních vlivů se přemění na teselaci. Výchozí tvary všech cel jsou shodné, tedy můžeme předpokládat, že se i zdeformují do shodných útvarů (tedy ve výsledku se bude jednat o pravidelnou teselaci), kterými jsou šestiúhelníky, jelikož jsou svým tvarem kružnici bližší než čtverec či trojúhelník.

Druhý úhel pohledu je, že včely účelně tvoří šestiúhelníky v rámci optimalizace získaného prostoru v systému cel a spotřeby materiálu při jeho výstavbě. Pojďme si ukázat, proč je šestiúhelník lepší volbou než čtverec nebo trojúhelník. Řekněme, že budeme pracovat pro všechny tři tvary se stejným množstvím materiálu, tzn. obvod útvarů zafixujeme jako délku a .

Vyjádření délky strany:

- rovnostranný trojúhelník: $3s = a \Rightarrow s = \frac{a}{3}$
- čtverec: $4s = a \Rightarrow s = \frac{a}{4}$
- pravidelný šestiúhelník: $6s = a \Rightarrow s = \frac{a}{6}$

Výpočet obsahů:

Rovnostranný trojúhelník (odvozeno na str. 41):

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2$$

Čtverec:

$$S = s^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{16}$$

Pravidelný šestiúhelník:

$$S = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}a^2$$

Z porovnání obsahů vidíme, že

$$\frac{\sqrt{3}}{36}a^2 \approx 0,0481a^2 < \frac{1}{16}a^2 = 0,0625a^2 < \frac{\sqrt{3}}{24}a^2 \approx 0,0722a^2,$$

tzn.

$$S_{\text{trojúhelník}} < S_{\text{čtverec}} < S_{\text{šestiúhelník}}.$$

Vidíme tedy, že pro včely je šestiúhelník optimálním tvarem ze tří možných pravidelně teselujících tvarů. Odborníci se shodují, že první možnost, tedy deformace kružnicového tvaru, je pravděpodobnější, není to však potvrzené. [19]

6.3 Informatika

V rámci aktivit do informatiky jsem se rozhodla věnovat primárně 3D tisku, jelikož se jedná o odvětví informatiky, které je aktuálně na vzestupu a pro většinu žáků je zajímavé. Úlohy jsou seřazeny od nejjednodušší po nejsložitější. Ve vzorovém splnění úkolu je kromě samotného modelu i popis jeho tvorby, popř. potíží, na které jsem při tvorbě narazila. Zadáání aktivit podobně jako v sekci *Výtvarná výchova* 6.1 v příloze čtenář nenajde, jelikož se jedná o jakýsi návrh náplně hodiny informatiky a je velmi individuální, jak tento návrh učitel uchopí. Aktivity vznikaly za průběžného konzultování s Mgr. Michalem Hlostou. Pro účely této práce jsem jako vzorové splnění úkolů volila teselace, které mě samotnou nejvíce oslovily, to však neznamená, že žáci nemohou pracovat jednoduššími koncepty jako např. teselace obecného čtyřúhelníku nebo teselace vytvořené pomocí sítě bodů jako na obrázku 3.2.

6.3.1 Tvorba rovinné teselace

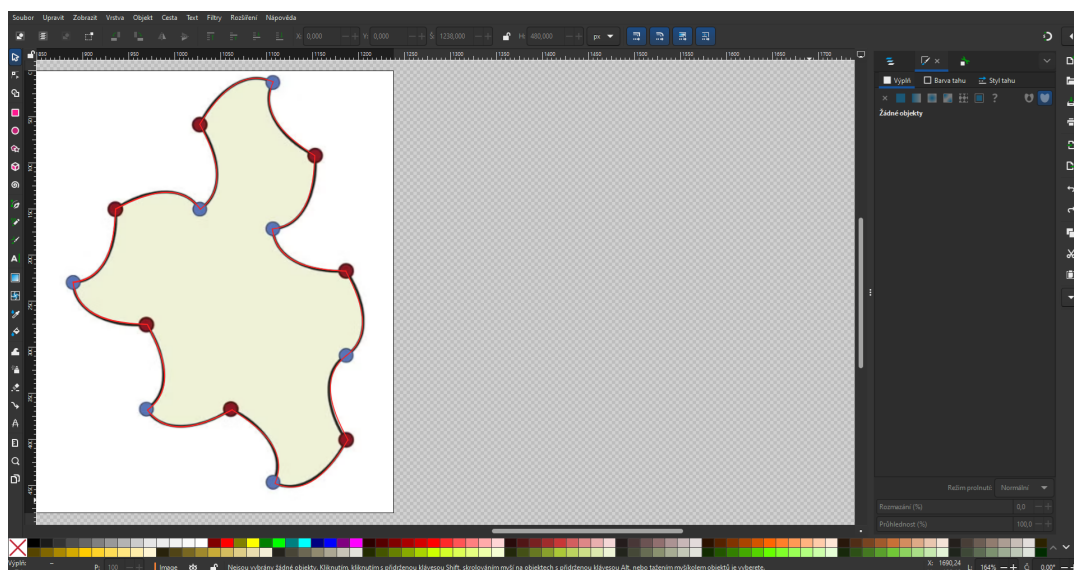
Komentář a motivace

Tato úloha slouží k pochopení základních principů 3D tisku, sama o sobě není příliš náročná ani zdlouhavá. Předpokladem je, že žák má připravenou teselaci, kterou by si rád vytiskl, to může být již vytvořená teselace vyhledaná na internetu nebo v nějaké knize, popř. přinesená do hodiny učitelem. Další možností je, že by si žáci mohli vytisknout jejich vlastní vytvořenou teselaci např. z aktivity 6.1.2. Během plnění úkolu si žáci osvojí převádění útvarů z obrázků na 3D modely. Ačkoliv vycházíme z rovinné teselace, jejím vytisknutím na 3D tiskárně se z ní přirozeně stává teselace prostorová, jelikož kachle najednou nabydou na výšce. Tento fakt budeme v následující úloze přehlížet. Pro zajímavost jsem se rozhodla aktivitu demonstrovat na obrázku již dříve zmíněné velmi specifické kachle, a to vampire einstein (obr. 1.10).

Vzorové splnění úkolu

Začala jsem s volbou teselace, kterou bych chtěla vytisknout, rozhodla jsem se pro tvar vampire einstein, sice se nejedná o zrovna jednoduchou volbu, ale tvar mi přišel zajímavý. Obrázek tvaru jsem si vložila do programu Inkscape, který je volně dostupný ke stažení. V programu jsem tvar obkreslila (obr. 6.12). Je třeba si dávat pozor, abychom zachovali všechny náležitosti kachle (žákům bych doporučila pracovat s jejich vlastní vytvořenou teselací, ať si jsou jisti, jaké vlastnosti musí tvar mít). Pro mou tvorbu bylo důležité, aby byly všechny křivky, které představují strany kachle, shodné a aby i úhly mezi nimi* byly shodné (na kachli se vyskytují 2 různé). Obecně je důležité si dávat pozor i na možné rovnoběžnosti a shodnosti částí kachle.

**Poznámka: Úhel, který svírají dvě křivky je roven úhlu, který svírají jejich tečny v průsečíku těchto dvou křivek.*



Obrázek 6.12: Obkreslení vampire einstein v programu Inkscape

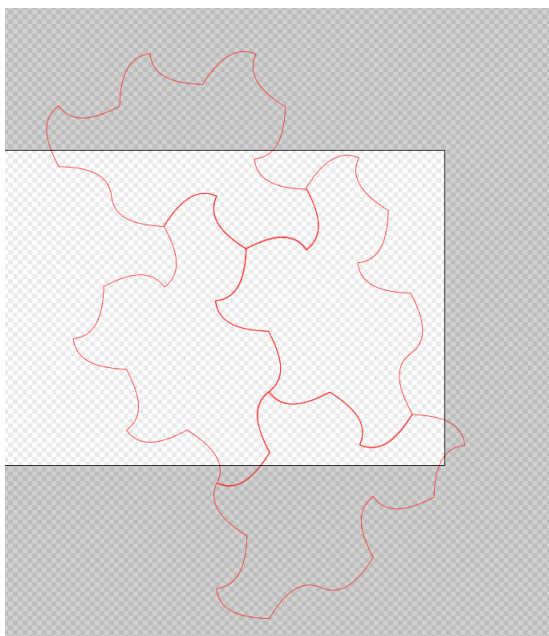
Pro samotnou tvorbu kachle z jednotlivých křivek je důležité, aby byla křivka uzavřená, kdyby tomu tak nebylo nepůjde útvar vybarvit. Jak tohle zaručit? Ideálně už během tvorby kachle (dá se to však opravit i dodatečně) hlídáme, že jednotlivé vrcholy jsou v jednom uzlu (v programu představují koncové body křivek uzly). Jinak by se dalo říci, že vedlejší křivky sdílí koncové body, kdyby se stalo, že koncové body nesdílí, ale jsou velmi blízko (viditelně až po několikanásobném přiblížení), můžeme je sloučit do jednoho uzlu. Sloučení do jednoho uzlu provádíme pomocí *Nástroje pro úpravu uzlů* (druhá ikona zhora v levém panelu nástrojů). Postup je následující, po zapnutí nástroje označíme oba dva uzly a klikneme na ikonku naznačující jejich sloučení (v horní liště čtvrtá zleva s popisem *Spojit vybrané uzly*). Toto spojení může nepatrně pozměnit tvar kachle, ale vzhledem k drobným nepřesnostem samotného 3D tisku je tato nepatrná změna zanedbatelná.

V této fázi, kdy mám obrys kachle hotov, jsem se přímo v programu rozhodla otestovat přesnost mé práce, a to kopírováním kachle a skládáním jedné vedle druhé – obr. 6.13. S tvarem jsem byla spokojená, tak už jsem kachli pouze vybarvila a následně uložila ve formátu svg (obr. 6.14).

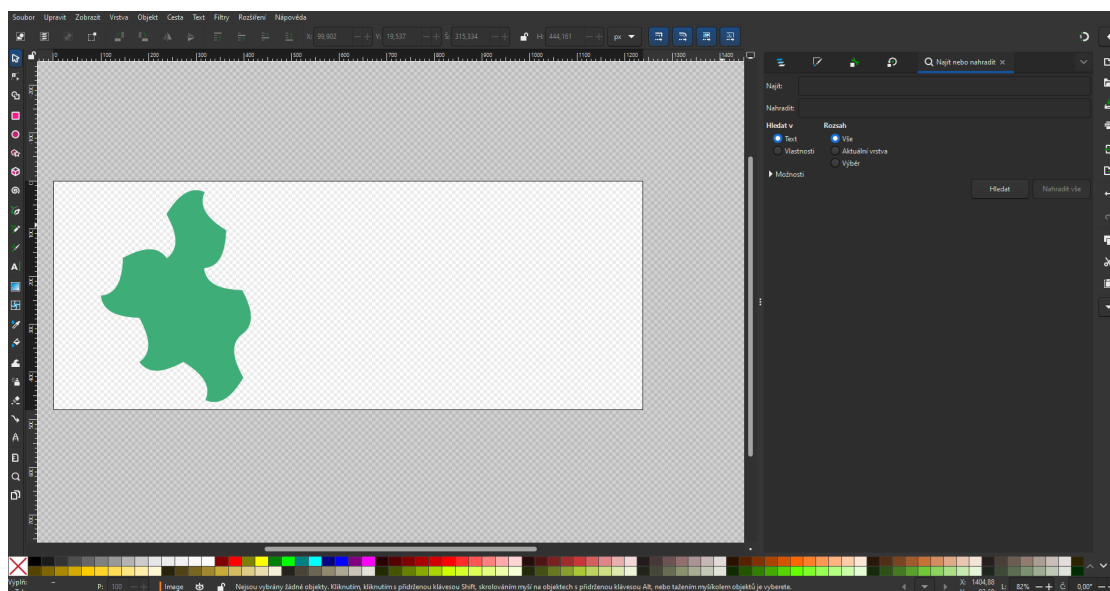
Následně jsem zamířila do webové aplikace Tinkercad, kde jsem pomocí tlačítka *Import* nahrála předpřipravený soubor a poupravila jeho velikost dle uvážení. Rozměry mé kachle jsou cca 30x35x3 mm. Posledním krokem je už samotný 3D tisk, pro ten jsem model uložila ve formátu *stl*. Tiskla jsem na 3D tiskárně Prusa pomocí programu Prusa Slicer, ve kterém je možné doladit nastavení tisku dle přání. Já jsem zvolila optimální rozložení tisku, následně kachle „naslicovala“, uložila na flash disk a vytiskla.

Poznámka: Během mé práce s programem Inkscape jsem narazila na potíž, kdy při použití nástroje *Ořez*, ačkoliv mě užití tohoto nástroje dovedlo do cíle, tj. za jeho využití jsem v programu vytvořila požadovaný tvar, byl problém tento soubor importovat do Tinkercadu. Ačkoliv aplikace podporuje soubory formátu svg, tak tento konkrétní nástroj není schopná

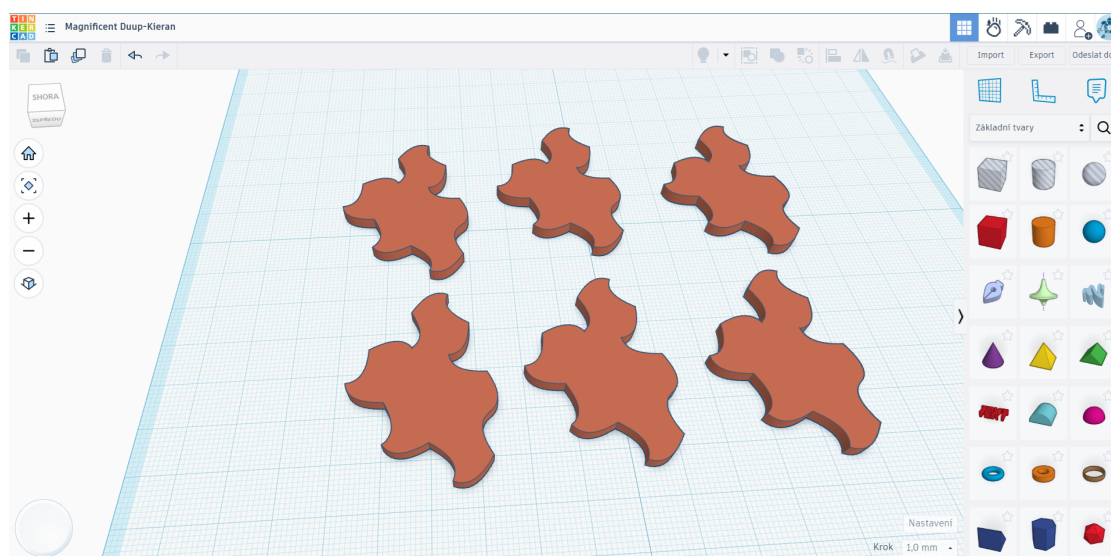
„překousat“, takže soubor, ve kterém byl nástroj použit vůbec nejde vložit do Tinkercadu. Nástroj Ořez se dá nahradit po rozvinutí nabídky Cesta, kde je k nalezení Průnik nebo Dělení, čímž se dá potíž obejít.



Obrázek 6.13: Kontrola přesnosti návrhu kachle



Obrázek 6.14: Připravený tvar vampire einstein v programu Inkscape



Obrázek 6.15: Kachle připravená pro 3D tisk ve webové aplikaci Tinkercad



Obrázek 6.16: Vytisklá část teselace (vampire einstein)

Vytisklá část teselace není tak dokonalá jako navržený model, jelikož běžná 3D tiskárna má na poměry této úlohy viditelné odchylky, přesto však dává model čtenáři možnost si teselaci osahat a přiblížit se konceptu aperiodické teselace.

6.3.2 Modelování prostorové teselace 1 – Hlavalam

Komentář a motivace

Následující úloha je více zaměřená na prostorovou představivost, jedná se o tvorbu hlavalamu, kterým se po vytisknutí mohou žáci následně bavit nebo navzájem vyzývat ke složení hlavalamu od spolužáka, čímž se ještě zintenzivní využívání prostorové představivosti při této aktivitě. Vzhledem k tomu, že se během tvorby hlavalamu tohoto typu pracuje pouze ve webové aplikaci Tinkercad, je možná vhodnější ji zařadit dříve než úlohu předchozí, v práci jsem se ji však rozhodla zařadit až jako druhou, jelikož z matematického hlediska je náročnější, protože už nepracujeme s rovinou, ale s prostorem. Náročnost hlavalamu záleží na tom, jak velkou zvolíme hranu krychle. Já zvolila délku hrany 4 (rozloženou na 12 dílů) a hlavalam je dost náročný, jeho složení zabere desítky minut, ne-li více.

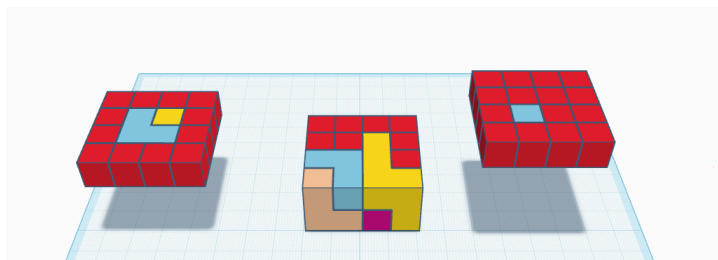
Vzorové splnění úkolu

Při tvorbě hlavalamu jsem začala vytvořením krychlové struktury opakovaným vkládáním malé krychličky, která by měla být cílový tvar složeného hlavalamu, v mém případě krychle o délce hrany 4 jednotky složená z 64 krychliček o délce hrany 1 jednotka.

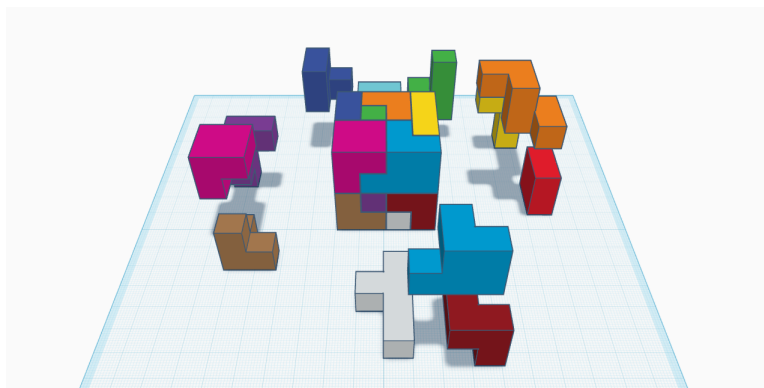
Následně jsem si rozložila krychli po patrech (označila jsem 16 krychliček horního patra a vysunula je doprava, pak jsem obdobně vysunula třetí patro doleva, spodní dvě patra jsem nechala na sobě, jelikož se na objekt můžeme dívat i ze spodní strany, takže tímto způsobem máme jasně viditelné všechny malé krychličky).

Poté jsem začala tvořit jednotlivé díly hlavalamu označováním a sjednocováním krychliček, které sdílí stěnu. Tato fáze tvorby je náročnější pro prostorovou představivost, jelikož si žák musí umět představit, jak na sebe patra doléhají a které krychle napříč patry spolu sousedí. Pro snadnější orientaci jsem měnila barvy jednotlivých předpřipravených dílů (obr. 6.17). Díly, které jsou součástí více pater jsem sjednocovala na dvakrát. Prvně jsem seskupila krychličky dílu v jednom patře a ve druhém (popř. třetím a čtvrtém) zvlášť. Už při tomto sjednocení jsem nastavila barvu částí dílů na jednotnou, abych po poskládání krychle měla jasno, které části dílů mají tvořit jeden díl. Druhé (popř. třetí a čtvrté) sjednocování jsem pak dělala během toho, co jsem patra skládala zpátky na sebe.

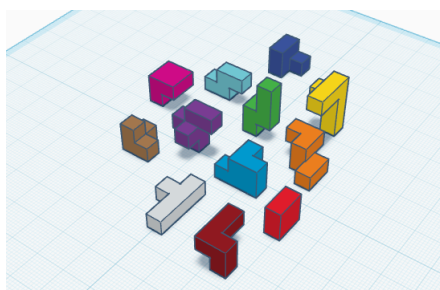
Ve chvíli, kdy jsem měla všechny díly připravené a krychli z nich opět složenou, pro kontrolu jsem všechny díly duplikovala a vytáhla z krychle ven, abych si ověřila, že jsem opravdu rozdělila všech 64 krychliček mezi 12 dílů (obr. 6.18). Po tomto ověření jsem složenou krychli umazala a uložila soubor ve formátu svg (obr. 6.19).



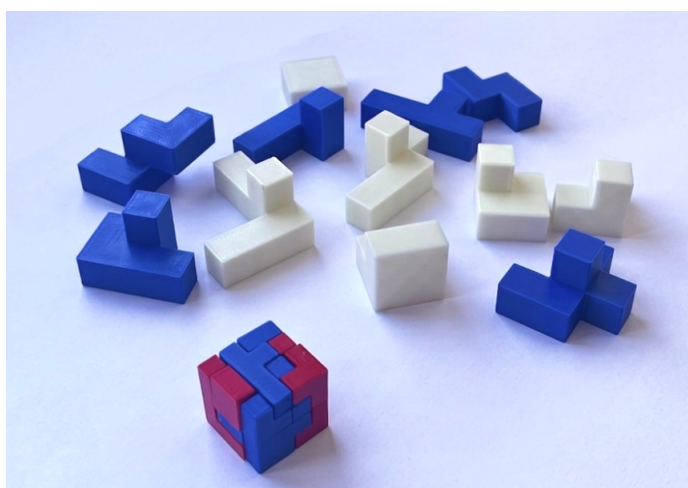
Obrázek 6.17: 1. fáze tvorby hlavalamu



Obrázek 6.18: 1. fáze tvorby hlavolamu – kontrola



Obrázek 6.19: Vytvořený hlavolam – Tinkercad



Obrázek 6.20: Vytvořený hlavolam

Následně jsem opět zamířila do Prusa Sliceru, kde na rozdíl od předchozí úlohy bylo nutné provést velmi specifické nastavení.

Nejprve je třeba se v programu přepnout do expertního režimu (vpravo nahoře), pak od sebe díly odskupit. Vzhledem ke tvaru dílů skládačky musíme promyslet, která strana by měla být při tisku ta spodní, to nastavíme pomocí příslušného nástroje (4. ikonka v levém sloupci nástrojů). Pro většinu dílů tímto máme nastavení hotové, pro jeden dílek mého hlavolamu je však nutné vytvořit podpěry pro tisk (obecně by se dalo předpokládat, že to bude potřeba i pro více dílů). Po stisknutí ikonky podpěr (levý sloupec nástrojů) vybarvím stranu, pro kterou potřebuji podpěry, které se následně samy vygenerují. Pak už je hlavolam připraven k tisku.

6.3.3 Modelování prostorové teselace 2 – Prostorová escherovská teselace

Komentář a motivace

Následující aktivita není zamýšlena jako běžná součást hodiny, ale spíše jako aktivita navíc nebo výzva pro šikovnější žáky. Jedná se o prostorovou escherovskou teselaci, která je na tvorbu už poměrně hodně náročná (je třeba mít výbornou prostorovou představivost a být poměrně kreativní a zdatný s programem, ve kterém je návrh tvořen).

Vzorové splnění úkolu

Přijít s vlastní escherovskou prostorovou teselací rozhodně není snadný úkol, sama jsem se inspirovala článkem [20], k čemuž bych vedla i žáky. Na internetu je k nalezení spousta prostorových teselací, ze kterých mohou čerpat inspiraci a usnadnit si tak práci. Další velkou pomocí je zvíře skládat pouze ze tří vrstev teselací. To mi umožnilo na celou teselaci pohlížet jako na tři rovinné teselace na sobě, které jsem následně „vytáhla“ do výšky. Při tvorbě teselace připomínající krávy jsem postupovala podobně jako v úloze 6.3.1 s tím rozdílem, že jsem tvořila tři překrývající se teselace zároveň.

Nejprve jsem si podle předlohy načrtla, jak bude teselace vypadat, začala jsem s jedním bokem krávy, který jsem nejprve namalovala v programu Inkscape (blíže popsáno v 6.3.1). Dbala jsem na to, abych zachovala tvary, které na sebe budou přiléhat stejně tak jako úhly, dle zásad představených v 3.2 a na to, aby byly uzly navazující a ve výsledku vznikla uzavřená křivka, tedy konkrétně dvě, protože součástí této vrstvy teselace je i ucho či roh krávy. Když jsem měla tuto vrstvu hotovou (tedy byl hotov obrys dílů na obrázku 6.21), pokračovala jsem samotným tělem krávy, jelikož její druhý bok bude symetrický s tím, který už je vytvořen. Při tvorbě této druhé vrstvy teselace jsem si v programu Inkscape nechala i vrstvu předchozí, ať mám stále představu o tom, jak bude zvíře ve výsledku vypadat. Výsledkem této části práce byly obrysy dílů na obrázku 6.22 (zatím bez děr a výstupků).



Obrázek 6.21: Escherovská prostorová teselace – boky krav

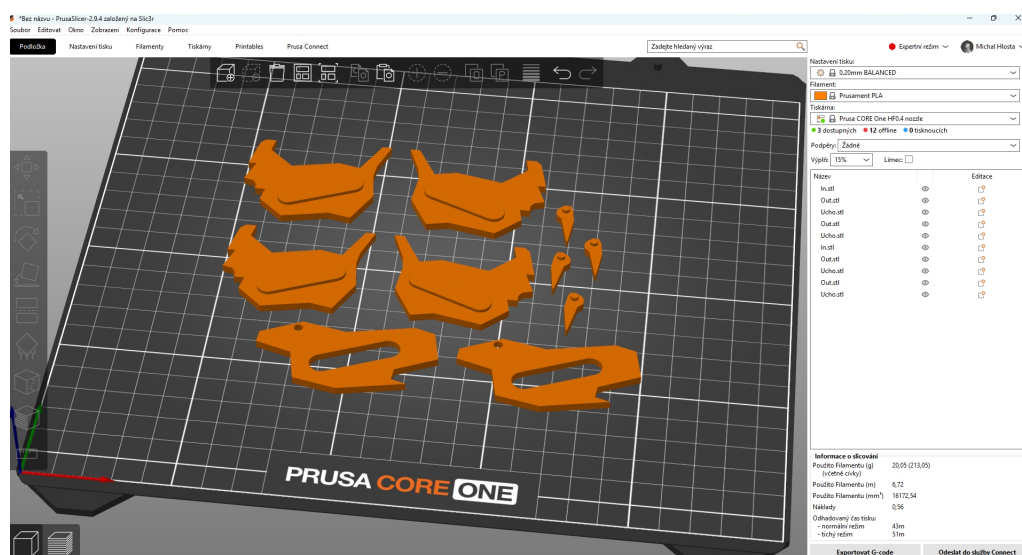


Obrázek 6.22: Escherovská prostorová teselace – těla krav

Tyto předpřipravené obrysy jsem uložila ve formátu *svg* a importovala do Tinkercadu, kde jsem doladila jednak rozměry a výšku dílů a jednak to, abych měla jak jednotlivé části kraviček spojit. Na teselaci obsahující boky a uši jsem přidala oblý výstupek na tělo a kruhový na ouško, tyto tvary jsem následně sloučila s připravenými částmi teselace, aby vznikl vždy jeden souvislý díl. Po vhodném zarovnání teselace jsem pak shodný oblý a kruhový výstupek zanořila do prostředního dílu krávy a pomocí nástroje *Díra* jej z části vyřízla, tyto díry jsem pak zase sjednotila s původním tvarem (pozor na to, že dva boky jedné krávy musí být zrcadlové – viz obr. 6.23). Výsledkem tak byla připravená skládačka krávy. Díly jsem pak dvakrát zkopírovala, abych mohla tisknout krávy vždy po dvojicích a uložila ve formátu *stl*. V Prusa Sliceru už jen stačilo zvolit optimální rozložení tisku a orientaci, při které leží největší plocha dílu na podložce a následně krávy vytisknout (viz obr. 6.24).

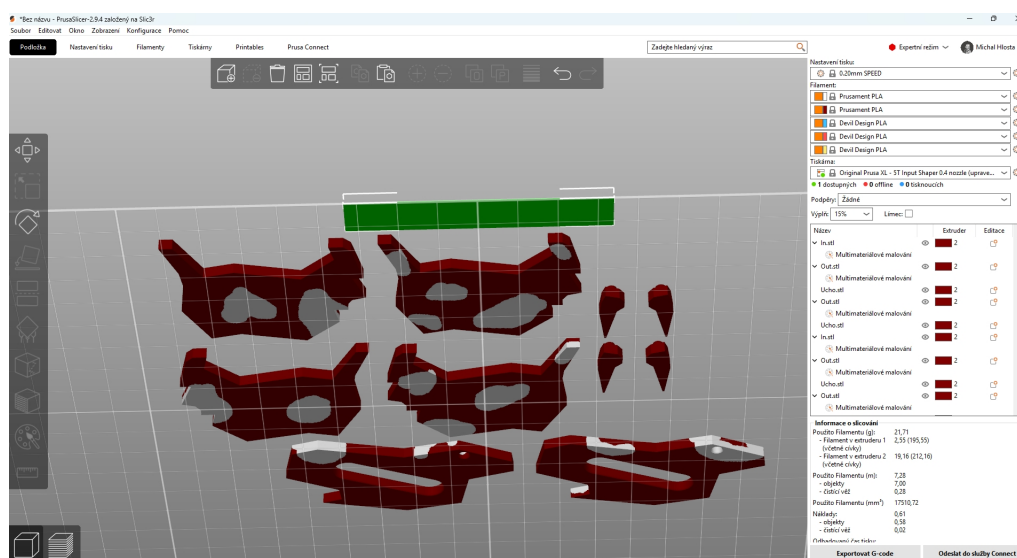


Obrázek 6.23: Escherovská prostorová teselace – rozložená kráva

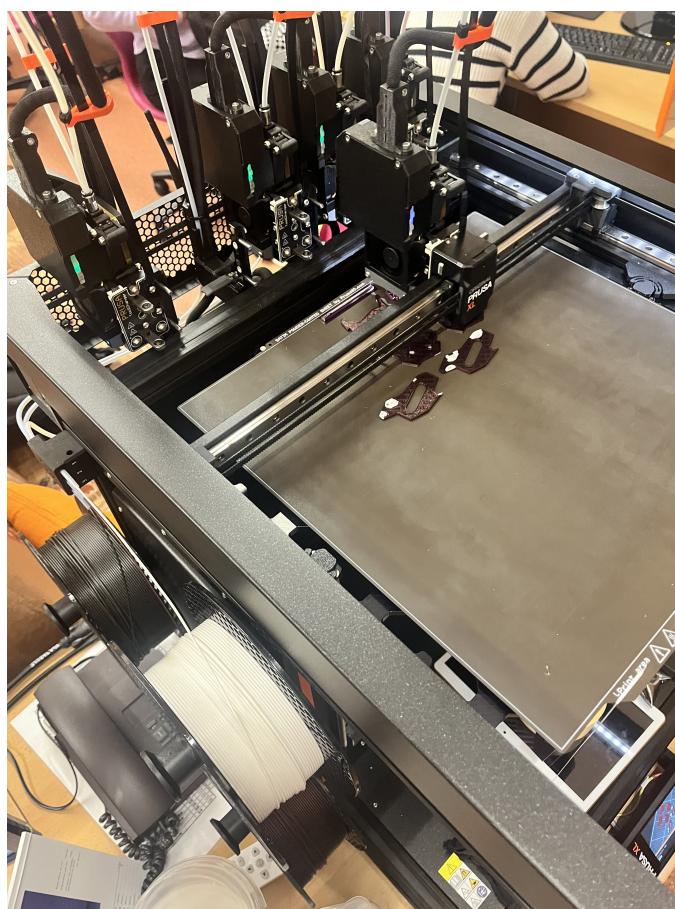


Obrázek 6.24: Escherovská prostorová teselace – krávy pro tisk

Zajímavostí mé teselace jsou dvě strakaté krávy, které jsem vytvořila díky pětiflamentové 3D tiskárně (obrázek 6.26), pro tento efekt jsem v Prusa Sliceru namalovala požadovaný vzor (viz obr. 6.25), který pak tiskárna vytiskla bez nutnosti měnit filament během tisku, jak tomu je při tisku na klasické jednofilamentové tiskárně.



Obrázek 6.25: Escherovská prostorová teselace – vzorované krávy



Obrázek 6.26: Escherovská prostorová teselace – tisk krav na pětiflamentové 3D tiskárně



Obrázek 6.27: Escherovská prostorová teselace

Poznámka: 5 párů krav jsem tiskla na 5 různých tiskárnách za použití dvou druhů filamentu, od čehož se odvíjelo to, jak pevně držely jednotlivé krávy poskládané. Žluté a červené krásně drží, zatímco pro zbylé barvy bylo nutné jednotlivé díly krávy slepit.

Závěr

Cílem práce bylo vypracovat srozumitelný středoškolský text o teselacích v rovině i prostoru. Dále navrhnout aktivity nejen do hodin matematiky, které by byly relevantní pro středoškolskou výuku a za využití teselací přispívaly k vzdělávacímu procesu žáka.

První část práce se věnuje představení teselací čtenáři. Nejprve nabízí přehled historie teselací, který rozšiřuje čtenářovy kulturní vědomosti. Následně práce obsahuje převážně středoškolský text, objasňující základní termíny, které se s teselacemi pojí. V některých částech textu záměrně převyšuji úroveň prezentovaných informací střední školu, za účelem vzbuzení dalšího zájmu o téma. Ve všech těchto částech je však čtenář na přesah upozorněn. Tyto první dvě kapitoly nejsou nezbytným předpokladem pro zvládnutí aktivit, jež jsou v práci následně představovány, slouží spíše jako kapitola rozšiřující povědomí o teselacích a jejich vlastnostech, které jsou pro následující aktivity značnou výhodou nikoliv nezbytnou podmínkou.

Pro zaručení relevantnosti aktivit jsem zahrnula kapitolu, v níž se věnuji souvislosti teselací a RVP jednak pro gymnázia a jednak pro střední školy stavební, jelikož právě v tomto RVP jsou detailněji rozepsaná geometrická témata úzce související s teselacemi.

Aktivity do hodin matematiky stejně jako mezipředmětové aktivity mají v komentáři vždy objasněno, co z nich dělá přínosné pro běžnou výuku a proč by měl učitel zvážit jejich zařazení do výuky. Aktivity do matematiky jsem se snažila volit tak, aby byly z různých odvětví matematiky a k teselacím vždy přistupovaly z trochu jiného úhlu. Inspiraci jsem čerpala z vlastních zkušeností, které jsem nabrala ať už během studia vysoké školy nebo jsem zavzpomínala na mé roky na gymnáziu. Zadání matematických aktivit jsou k nalezení v příloze na rozdíl od zadání úloh mezipředmětových, které jsou čtenáři představovány (kromě protokolu do biologie) více jako náměty na náplň hodin a záleží na daném učiteli, jak se rozhodne aktivitu pojmout. Předměty jako je výtvarná výchova nebo biologie toto volnější pojetí na rozdíl od matematiky umožňují. Všechny úlohy a aktivity obsahují vzorové řešení, v matematice se jedná o komentované řešení úlohy, zatímco v mezipředmětových aktivitách jde o vzorový výsledek práce. V rámci aktivit propojujících informatiku s teselacemi je v rámci tohoto vzorového řešení poskytnut bohatý komentář o tvorbě modelů. Tyto úlohy jsou přínosem pro rozvoj prostorové představivosti žáka, jelikož se v nich žák setkává s prostorovými teselacemi.

Práce obsahuje mnohé náměty pro práci s teselacemi na střední škole. Za předpokladu, že žáci jsou s teselacemi seznámeni, mohly by se aktivity ve všech odvětvích ještě rozšířit např. v rámci informatiky by se dalo uvažovat o kódu, který by sám vykresloval na obrazovku teselace daných vlastností nebo v rámci matematiky by mohli žáci blíže analyzovat o jaký typ symetrických roviných grup se jedná, samozřejmě ne pod tímto názvem, ale upravené adekvátně pro střední školu.

Přílohy

Které mnohoúhelníky teselují a proč - Rekonstrukce

Rekonstruuje dům a právě vybíráte kachličky do koupelny, kterými vydláždíte podlahu o rozměrech $2\text{ m} \times 3\text{ m}$. Ačkoliv je zvykem, že se kachle prodávají buďto po metrech čtverečních nebo po baleních, rozhodli jste se pro ručně malované ozdobné kachle, které se prodávají po kusech.

V obchodě s ozdobnými kachlemi nabízejí následující tvary kachlí:

- čtverec o straně 20 cm za 66 Kč/kus,
 - čtverec o straně 10 cm za 18 Kč/kus,
 - pravidelný pětiúhelník o straně 10 cm za 45 Kč/kus,
 - kosočtverec o straně 15 cm a výšce 12 cm za 38 Kč/kus,
 - pravidelný šestiúhelník o straně 12 cm za 90 Kč/kus,
 - pravidelný dvanáctiúhelník o straně 10 cm za 235 Kč/kus,
 - rovnostranný trojúhelník o straně 12 cm za 21 Kč/kus.
- a. Ze kterých kachlí a proč můžeme vybírat, přejeme-li si celou podlahu vydláždit dlaždicemi jednoho tvaru (pomineme-li nutnost zaříznout krajní kachle dle potřeby)?
- b. Který tvar bychom měli zvolit, přejeme-li si zvolit co nejlevnější variantu?

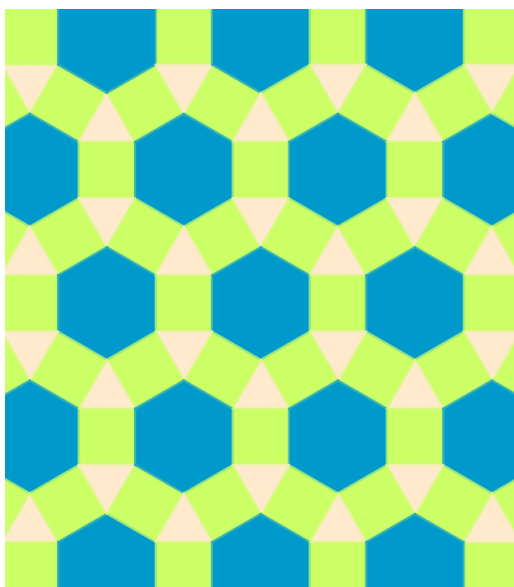
Bonusové otázky:

- c. Jakou dvojici kachlí můžeme zvolit, jestliže si přejeme na podlahu využít právě dva různé tvary dlaždic opakující se v periodickém vzoru (vyskládané stylem strana ke straně)? Vyskládání načrtněte.
- d. Co vše může ovlivňovat cenu kachlí? Proč cena přímo neodráží velikost kachle?
- e. Jak velké množství kachliček je vhodné koupit jako rezervu?

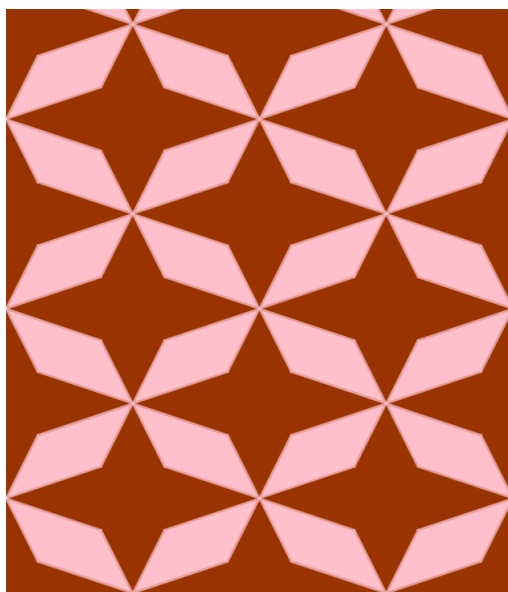
Popis symetrií v teselacích

V následujících ukázkách teselací najděte a popište všechna rovinná zobrazení pro alespoň jednu periodu:

a.



b.



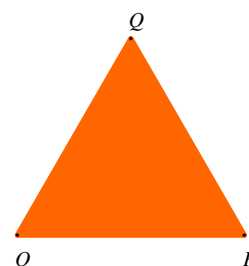
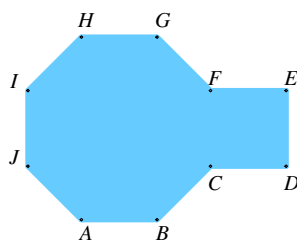
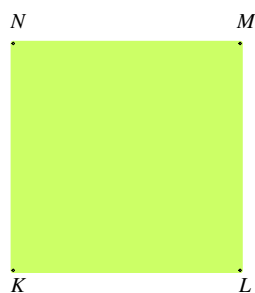
c.



Popis teselací pomocí vektorů

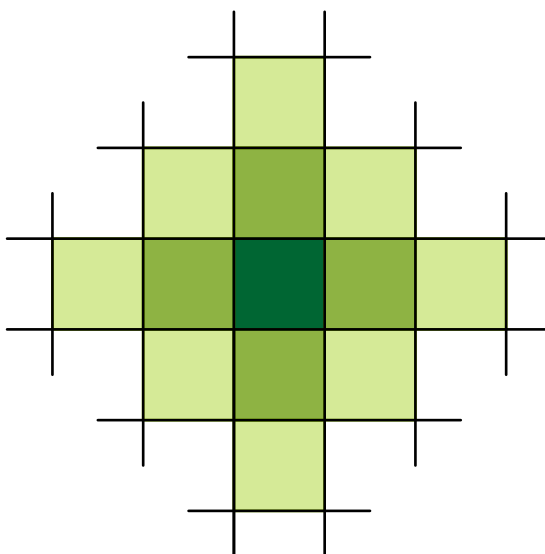
Najděte vektory generující teselace daných dlaždic.

- Jsou nalezené vektory lineárně závislé nebo nezávislé? Bylo by možné najít závislé vektory generující rovinnou teselaci?
- Kolik vektorů je třeba pro generování rovinné teselace?
- Kolik vektorů by bylo třeba pro generování prostorové teselace?



Posloupnosti – Po kolika dlaždice přibývají

Dláždíte rovinu, jako první položíte jednu čtvercovou dlaždici (nejtmavší na obrázku), v každém dalším kroku přidáte ke každé krajní straně další dlaždici. Svůj postup stále opakujete, jako je naznačeno na obrázku. Určete vzorec pro n -tý člen posloupnosti (tj. posloupnost počtů nově přibylých kachlí) nejprve rekurentně, a pak i explicitně. První členy posloupnosti jsou podle obrázku $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$.



Kombinatorika – Typy vertexů

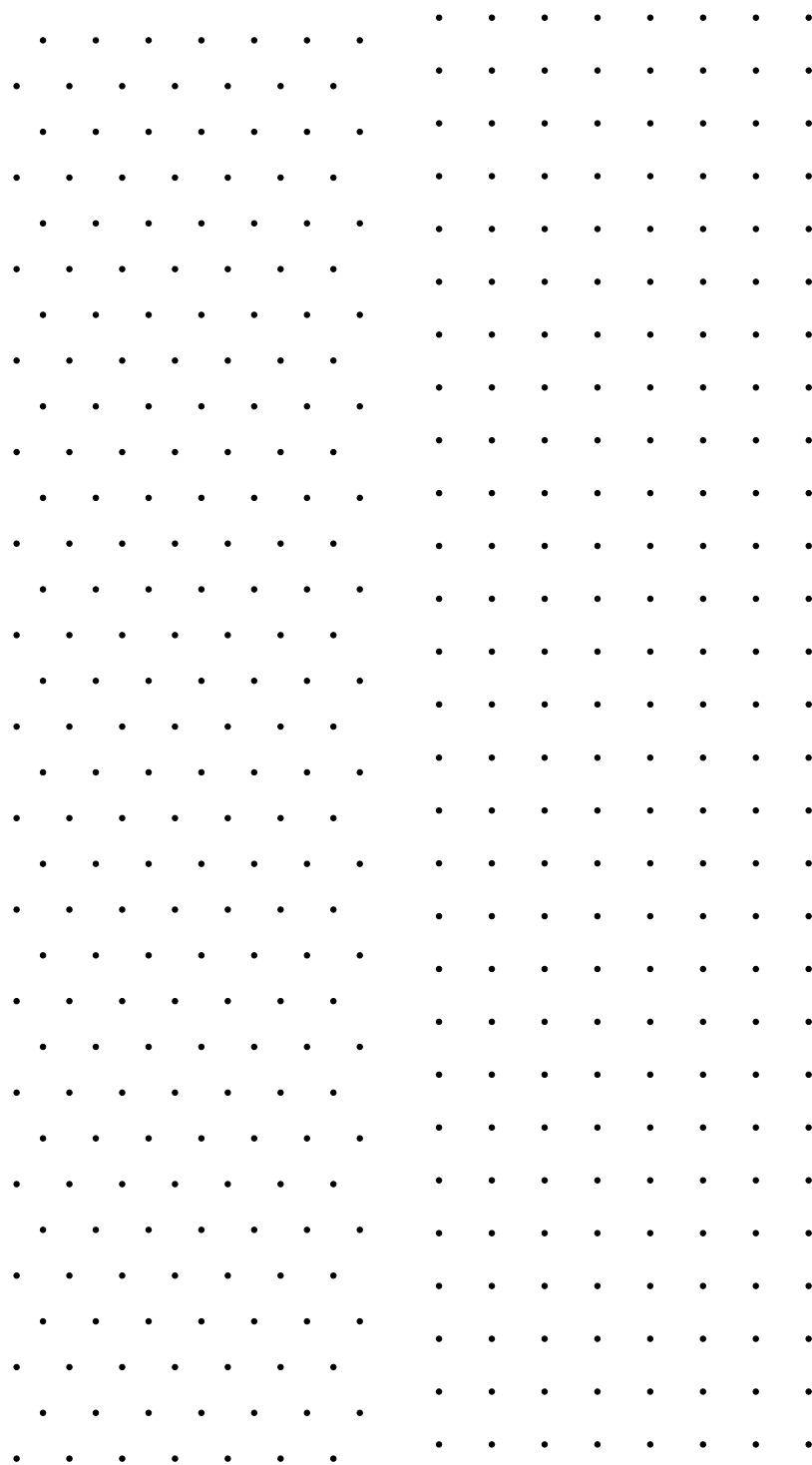
Kolik je možné vytvořit typů vertexů za použití pouze pravidelných n -úhelníků (mohou se opakovat), kde n je nejvýše 12? Své tvrzení odůvodněte.

Nápověda 1: Zamyslete se, jak zjistíme velikosti vnitřních úhlů pravidelných n -úhelníků.

Nápověda 2: Jakou kombinací vnitřních úhlů dostaneme součet 360° ?

Nápověda 3: Záleží na uspořádání n -úhelníků?

Sítě pro tvorbu teselací



Protokol

Laboratorní protokol: Pozorování epidermálních buněk cibule

Jméno a příjmení:	
Třída:	
Datum:	
Laboratorní práce číslo:	

Cíl práce

Pozorovat buňky epidermis cibule pod mikroskopem, identifikovat jejich struktury a vytvořit matematický model jejich uspořádání pomocí teselace.

Pomůcky

cibule kuchyňská, pinzeta, preparační jehla, podložní a krycí sklíčko, kapátko, voda, mikroskop, papír, tužka (popř. pastelky), Lugolův roztok

Postup práce

1. Rozkroj cibuli a odděl jednu dužnatou vrstvu.
2. Pomocí pinzety opatrně sloupni tenkou blánu (epidermis) z vnitřní strany.
3. Přenes ji na podložní sklíčko.
4. Přidej kapku vody.
5. Volitelně přidej kapku Lugolova roztoku pro lepší viditelnost jádra.
6. Přikryj krycím sklíčkem (ze šikma, aby nevznikly bubliny).
7. Pozoruj preparát pod mikroskopem.

Nákres pozorovaných buněk včetně popisu buněčné stěny, jádra a vakuoly:

Otázky

1. Jaký tvar mají buňky epidermis cibule? Jsou všechny stejné?
2. Proč je vhodné použít barvivo? Co se změnilo po jeho použití?

Teselace

Navrhni jeden základní tvar („kachličku“), který se bude opakovat, a vytvoř teselaci, která bude co nejlépe aproximovat uspořádání buněk.

Náčrt teselace

Porovnání modelu s realitou

1. V čem se tvoje teselace podobá skutečným buňkám?
2. V čem se liší?

Diskuze

1. Proč nejsou buňky dokonale pravidelné jako teselace?
2. Jaké faktory ovlivňují tvar a velikost buněk?
3. Jaké jsou výhody a nevýhody použití matematického modelu (teselace) v biologii?

Závěr

Shrň, co jsi při pozorování zjistil/a.

Seznam použité literatury

- [1] FATHAUER, Robert. *Tessellations: mathematics, art, and recreation*. Boca Raton: CRC Press, 2021. ISBN 978-0-367-18596-1. 2, 11
- [2] SAYMOUR, Dale a Jill BRITTON. *Introduction to tessellations*. Palo Alto: Dale Seymour Publications, 1989. ISBN 0-86651-461-9. 2
- [3] Take a Tour of Tessellations, the Mathematical Art of Repeating Patterns. My Modern Met [online]. 2021, 1(1), 1 [cit. 2025-06-26]. Dostupné z: <https://mymodernmet.com/tessellation-art/> 5
- [4] KAPLAN, Craig S. a David H. SALESIN. *Islamic star patterns in absolute geometry*. *ACM Transactions on Graphics*, 2004, roč. 23, č. 2, s. 97–119. ISSN 0730-0301. 5
- [5] ESCHER, Maurits Cornelis. *The World of M. C. Escher*. New York: Abrams, 1992. ISBN 978-0-810-92522-8. 7
- [6] FIELD, Judith Veronica. *M. C. Escher: Visions of Symmetry*. New York: Harry N. Abrams, 2007. ISBN 978-0-810-93308-8. 7
- [7] KRÁLOVÁ, Magda. Teselace. Techmania Science Center [online]. 2007 [cit. 2025-08-28]. Dostupné z: <https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/matematika/geometrie/teselace> 8
- [8] SENECHAL, M. *Quasicrystals and Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 9
- [9] SMITH, D., MYERS, J. S., KAPLAN, C. S. a GOODMAN-STRAUSS, C. The Einstein Problem Solved: Aperiodic Monotile Exists. arXiv preprint, 2023. arXiv: 2303.10798. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/2303.10798> 9
- [10] The vampire einstein: Researchers discover a single shape that tiles the plane aperiodically without reflection. In: University of Waterloo [online]. 2023 [cit. 2026-01-28]. Dostupné z: <https://uwaterloo.ca/computer-science/news/vampire-einstein-aperiodic-monotile-without-reflection> 9
- [11] KUPČÁKOVÁ, Marie. *Geometrie ve světě dětí i dospělých*. Vyd. 2. Hradec Králové: Gaudeamus, 2005. ISBN 80-7041-295-X. 11
- [12] VORÁČOVÁ, Šárka a Lucia CSACHOVÁ. *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012. Atlas. ISBN 978-80-200-1575-4. 11

- [13] HUŠEK, Miroslav, Jiří SPURNÝ a Benjamin VEJNAR. *Topologie* [online]. Praha, 2024 [cit. 2024-12-25]. Dostupné z: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/spurny/doc/topology/topology.pdf>. Pomocný učební text. Univerzita Karlova. 11
- [14] The Simplest Diagram of the 17 Symmetry Types, Ever. Artlandia [online]. 2015 [cit. 2025-08-28]. Dostupné z: <https://blog.artlandia.com/the-simplest-diagram-of-the-17-symmetry-types-ever/> 20
- [15] Kapitola 28: Frieze Groups and Crystallographic Groups. In: Gallian, Joseph A. Contemporary Abstract Algebra, 9. vyd. [online]. 2017 [cit. 2025-08-28]. Dostupné z: <https://www.d.umn.edu/~jgallian/Chapter28.pdf> 20
- [16] The Beauty of Symmetry: An Introduction to the Wallpaper Group [online]. [cit. 2025-08-28]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=C_konuQKGtQ&t=482s&ab_channel=Dr.TrefoBazett 20
- [17] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia [online]. VÚP, 2022 [cit. 2025-12-17]. Dostupné z: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2020/08/RVPG-2007-07_final.pdf 35
- [18] Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 36 – 47 – M/01 Stavebnictví [online]. VÚP, 2023 [cit. 2025-12-17]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvpsov/revize/36-47-M01.pdf> 35
- [19] Šestihhranné buňky – záměr nebo náhoda. In: AnnKas [online]. 2024 [cit. 2026-04-11]. Dostupné z: <https://www.annkas.eu/a/sestihhranne-bunky-zamer-nebo-nahoda?srsId=AfmB0ooVXDIIhf2627-e83UG9ZswTRC85zZ-sx2E9inJW4QHor9S0v9j> 63
- [20] KUHKBUS-3D-Escher-tessellations. Journal of Mathematics and the Arts [online]. 2019, 2020(14), 1 [cit. 2026-04-15]. Dostupné z: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17513472.2020.1734519> 70

Seznam zdrojů obrázků

- [Obr. 1] Columns decorated in the early 3rd millennium bce by the Sumerians in a mosaic-like technique with polychrome terra-cotta cones, from Uruk, Mesopotamia; in the National Museums of Berlin. In: BKIDS [online]. 2026 [cit. 2026-03-12]. Dostupné z: <https://kids.britannica.com/kids/assembly/view/2079> ix, 4
- [Obr. 2] Bird Mosaic. In: ShareAmerica [online]. 2017 [cit. 2025-06-26]. Dostupné z: <https://archive-share.america.gov/wp-content/uploads/2017/08/AB8PJG-1-696x462.jpg> ix, 5
- [Obr. 3] Tile work in Morocco Pavilion. In: My Modern Met [online]. 2021 [cit. 2025-06-26]. Dostupné z: <https://mymodernmet.com/wp/wp-content/uploads/2021/07/tessellations-6.jpeg> ix, 6
- [Obr. 4] Soukromá prohlídka Alhambry. In: Alhambra Tickets [online]. 2025 [cit. 2025-06-27]. Dostupné z: <https://alhambratickets.tours/cs/prohlidky-alhambry/soukroma-prohlidka-alhambry/> ix, 6
- [Obr. 5] Fasáda Santa Maria Novella. In: My Art Prints [online]. 2025 [cit. 2025-06-30]. Dostupné z: <https://www.myartprints.cz/a/alberti/fasada-santa-maria-novella.html?srsltid=AfmB0oqd0sQrNS7Dm89od-DVEuZiPEVhFAf0BmmR1ajhT9hKuUICHfFs> ix, 7
- [Obr. 6] Escherovy ještěrky. In: Bublina [online]. 2016 [cit. 2025-06-30]. Dostupné z: [odkaz](#) ix, 8
- [Obr. 7] Penroseova teselace. In: Techmania Science Centrum [online]. 2007 [cit. 2026-04-14]. Dostupné z: <https://edu.techmania.cz/sites/default/files/styles/large/public/encyklopedie/insert/14.png?itok=uYU3241k> ix, 9
- [Obr. 8] Einstein Shape. In: Scientific American [online]. 2023 [cit. 2025-06-30]. Dostupné z: <https://www.scientificamerican.com/article/newfound-mathematical-einstein-shape-creates-a-never-repeating-pattern/> ix, 10
- [Obr. 9] The 14-sided polygon Tile(1,1), on the left, is known as a weakly chiral aperiodic monotile — in other words, if tilings that mix unreflected and reflected tiles are forbidden, then it tiles only aperiodically. However, by mo-

- difying its edges, as shown in the centre and right, strictly chiral aperiodic monotiles called “spectres” are created that admit only non-periodic tilings. In: University of Waterloo [online]. 2023 [cit. 2026-03-12]. Dostupné z: <https://uwaterloo.ca/computer-science/news/vampire-einstein-aperiodic-monotile-without-reflection> ix, 10
- [Obr. 10] Weisstein, Eric W. ”Wallpaper Groups.” From MathWorld—A Wolfram Resource. <https://mathworld.wolfram.com/WallpaperGroups.html> ix, 23
- [Obr. 11] Matching Frieze Patterns — NRICH. In: Nrich [online]. [cit. 2026-02-25]. Dostupné z: <https://nrich.maths.org/sites/default/files/thumbnails/content-97-09-six8-test.gif> ix, 24
- [Obr. 12] FATHAUER, Robert. I tweaked up a frog, horned lizard, and snake tessellation from 1995 for my new book on tessellations. It’s an example of using a rhombus rosette as the basis for an Escheresque tessellation. In: X [online]. 2019 [cit. 2026-04-08]. Dostupné z: <https://pbs.twimg.com/media/DyGHnvUU0AAv61s?format=jpg&name=small> x, 33
- [Obr. 13] Fractal Fish. In: TESSELLATIONS Art most in harmony with the natural order Method and Galleries [online]. 2014 [cit. 2026-04-08]. Dostupné z: <https://tessellations-nicolas.com/images/fractal-green-fish-stage-max.png> x, 33
- [Obr. 14] Pull-up nets for a) the tetrahedron, b) the cube, c) the octahedron, d) the dodecahedron and e) the icosahedron, patterned with manipulated Escher designs. In: ResearchGate [online]. 2014 [cit. 2026-04-12]. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/profile/Briony-Thomas/publication/267941322/figure/fig1/AS:895931004235777@1590618005369/Pull-up-nets-for-a-the-tetrahedron-b-the-cube-c-the-octahedron-d-the-dodecahedron.ppm> x, 34
- [Obr. 15] Gaudí - The Mosaic Genius of Barcelona - Mosaics Lab - contemporary mosaic art, custom mosaic artwork, and mosaic tiles. In: Mosaics Lab [online]. 2019 [cit. 2026-03-21]. Dostupné z: <https://new.mosaicslab.com/blog/wp-content/uploads/2019/01/7.-Mosaics-Lab-Tile-Mosaic-Artwork-Mosaic-Designs-Handmade-Mosaic-Art.jpeg> x, 54
- [Obr. 16] Mozaik u Meknesu. In: Wikipedia [online]. 2024 [cit. 2026-03-17]. Dostupné z: https://hr.wikipedia.org/wiki/Datoteka:Mekhnes_Place_El-Hedine_Mosaique2.jpg x, 57
- [Obr. 17] L’organisation du foie. In: Académie de Rennes [online]. 1 [cit. 2026-03-27]. Dostupné z: https://lh4.googleusercontent.com/proxy/Ir6wsH5R6t32fEb2XntFu1Q5lHkfUxkN7rVbnJlgDW_hhZlAHm3hUdseptkN-GR7hb1Cv4F29xT32i4r5ipl89SQjaPBDxDmww x, 58

[Obr. 18] Cole-Parmer Prepared Slide, Onion Skin, Cs. In: Cole-Parmer [online]. 2026 [cit. 2026-03-27]. Dostupné z: <https://www.coleparmer.ca/i/cole-parmer-prepared-slide-onion-skin-cs/7890799> x, 58

