

Historie výkladu pohybu Měsíce od Clairauta k Hillovi

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta MU, Kotlářská 2, 611 37 Brno

V nebeské mechanice ve studiu pohybu Měsíce v období po Newtonovi spojujeme další rozvoj analytických metod se spisem francouzského astronoma a matematika **Alexise Clauda Clairauta** (1713–1765), viz obr. 1, *De l'orbite de la Lune dans le système de M. Newton*, česky *O dráze Měsíce v Newtonově soustavě* [1], z roku 1743. Zavedl v něm dvě diferenciální rovnice v polárních souřadnicích pro rovinný pohyb Měsíce a na něj působící síly $rd^2\varphi + 2drd\varphi = F_k dt^2$ a $rd\varphi^2 - d^2r = F_r dt^2$, kde F_k je součet složek sil působících kolmo na rádius vektor a F_r je součet složek sil ve směru rádius vektoru, podrobnější věcný rozbor je v [2]. Důvtipným způsobem tak modeloval pohyb Měsíce prostřednictvím stáječící se elipsy s pohyblivým perigeem. Obdržel závislost mezi délkou Měsíce a časem. Dále vyjádřil eliptickou dráhu Měsíce v polárních souřadnicích $r = \frac{k}{1 + e \cos c\varphi}$, kde $\frac{k}{r}$ je převrácený rádius vektor, k , e , c jsou konstanty. Rychlost rotace elipsy (pohyb perigea) interpretoval pomocí výrazu $1 - c$. Odvodil, že $c = 1 - \frac{3}{4} m^2$, což odpovídalo již dříve New-

tonem získanému obdobnému výrazu. Po dosažení za $m = \frac{n'}{n}$, kde n' a n jsou střední denní pohyby Slunce, respektive Měsíce, obdržel Clairaut $m = 0,0748$. Tedy $1 - c = 0,00420$, zatímco z pozorovacích údajů byla propočítána hodnota $1 - c = 0,00845$. Výklad výpočtů je například v [2, 3, 4], číselné hodnoty uváděny podle [3]. Posuv perigea měsíční dráhy tak dával výsledek blízký se prvním Newtonovým výpočtům, neodpovídal však hodnotám získaným z astronomických pozorování, byl dvakrát menší.

Hledání výstižné interpretace pohybu měsíčního perigea se stalo prubířským kamenem nejen pro teorii pohybu Měsíce, ale i pro zákon všeobecné gravitace. Clairaut a další fyzici začali pochybovat o úplnosti Newtonova vyjádření tohoto zákona. V letech 1744–1749 dokonce uvažovali o úpravě přidáním druhého členu $F = G \frac{M_1 M_2}{r^2} + \alpha \frac{M_1 M_2}{r^n}$, kde $n > 2$, příkladně 3. Koeficient α byl v aplikacích volen velmi malý, proto při velkých vzdálenostech byl zanedbatelný, například u výkladu teorie pohybu planet.

Nesprávnou myšlenku doplnění gravitačního zákona Clairaut po diskusích zejména s francouzským přírodovědcem a matematikem **Georgem Louism Leclercem de Buffonem** (1707–1788) opustil, neboť zjistil, že příčina rozdílů mezi teoretickými a pozorovacími údaji nespočívá v nepřesnosti vyjádření zákona, ale v nedostatečné analýze problému. Předchozí teorie pohybu Měsíce Newtona z počátku osmnáctého století a francouzského fyzika a matematika **Jeana Baptista d'Alamberta** (1717–1783) z poloviny téhož století bylo potřebné upřesnit v tzv. druhém přiblížení.

Motivačním impulzem na zdokonalení teorie pohybu Měsíce a vytvoření metody pro výpočet jeho poloh v libovolném čase bylo vypsání konkurzu sanktpetěrburskou akademií věd v roce 1750. Důvodem byla možnost praktického využití Měsíce ke stanovení poloh pozorovatele na Zemi, k čemuž byly potřebné jeho efemeridy s přesností alespoň úhlové vteřiny. Uvedená chyba v úhlovém určení polohy Měsíce odpovídá stanovení souřadnic pozorovacího místa s přesností 30 km.

Roku 1752 Clairaut získal vypsanou cenu a vydal dílo nazvané *Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle (sic) aux*



Obr. 1 Alexis Claude Clairaut (1713–1765)



Obr. 2 John Harrison (1693–1776)

quarrés des distances, česky *Teorie Měsíce*, odvozená z jednoho principu přitažlivosti, úměrného převrácené hodnotě kvadrátu vzdálenosti [5].

V díle jsou řešeny diferenciální rovnice pohybu Měsíce při započtení poruchového působení Slunce. Clairaut poukázal na skutečnost, že měsíční nerovnosti se projevují v délce i šířce Měsíce. Ve vztazích jeho teorie jsou tyto parametry vyjadřovány pomocí součtu členů řady.

Zavedl úplnější aproximaci ve vztahu pro převrácený rádius vektor, doplnil další členy, dospěl ke tvaru $\frac{1}{r} = 1 + e \cos c\varphi + \delta \cos(2 - 2m - c)\varphi + \beta \cos 2(1 - m)\varphi + \alpha \cos(2 - 2m + c)\varphi$, kde $\delta \equiv \frac{15}{8}em$, $\beta \equiv m^2$, $\alpha \equiv -\frac{5}{8}em^2$, viz například v [6]. Clairaut pomocí zpřesněného vztahu následně odvodil výraz pro posuv perigea měsíční dráhy prostřednictvím mocninné řady s větší přesností. Obdržel pro veličinu $c = 1 - \frac{3}{4}m^2 - \frac{225}{32}m^3 - \frac{4071}{128}m^4 - \dots$, tedy při dosazení za $m \equiv \frac{1}{13,4} \approx \frac{3}{40}$ v rozvoji včetně kubického členu, získal $1 - c = 0,007\,139$, což se již přibližovalo hodnotě 0,008 452 získané z pozorování. Hodnota m je malá ve srovnání s jedničkou, každý další člen řady je tak mnohem menší než předcházející. Newton a d'Alambert při výpočtech hodnot posuvů perigea používali pouze první kvadratický člen řady, kubický a další zanedbávali. Započítáním kubického členu mocninné řady dosáhl Clairaut zmenšení rozdílu teoreticky propočítané a z pozorovacích údajů stanovené hodnoty přibližně dvakrát. Konkrétně pro roční posuv měsíčního perigea obdržel výpočtem $34^\circ 22'$, což bylo blíže k hodnotě $40^\circ 41'$ než starší výpočet dávající hodnotu $20^\circ 12'$. Matematicky vyjádřeno podle [6], Clairaut objasnil pohyb měsíčního perigea na 85 % ve srovnání s původním prvním Newtonovým výkladem reprezentujícím 50 %. Při zahrnutí dalšího členu mocninného rozvoje tak bylo dosaženo dobrého souhlasu teoretické a pozorovací hodnoty.

Na základě podrobných výpočtů Clairaut sestavil a publikoval v roce 1754 tabulky *Tables de la Lune* česky *Tabulky Měsíce*, podle kterých se propočítané souřadnice Měsíce odlišovaly od pozorovaných přibližně o 1,5'.

Vypracování teorie pohybu Měsíce, jak jsme již uvedli, bylo důležité pro upřesnění stanovení polohy pozorovatele na Zemi, zejména na mořích. Definitivní

a principiálně jiné řešení přinesl až anglický hodinář **John Harrison** (1693–1776) viz obr. 2, který roku 1772 podal návrh konstrukce chronometru kompenzujícího vliv teploty na délku kyvadla. Námořníci získali možnost přenášet na lodích čas nultého greenwichského poledníku. Z pozorování hvězd určili místní čas, z rozdílu obou stanovovali zeměpisnou délku.

Další upřesnění předchozích teorií pohybu Měsíce provedl švýcarský fyzik a matematik **Leonhard Euler** (1707–1783), viz obr. 3, ve svém díle *Theoria motus Lunae exhibens omnes eius inaequalitates in additamento*, česky *Teorie pohybu Měsíce odhalující všechny jeho nerovnosti s dodatkem*, z roku 1753 [7]. V předmluvě díla Euler charakterizoval svoje myšlenky o aplikaci gravitační teorie na pohyb Měsíce takto: „Za posledních čtyřicet roků jsem se často pokoušel odvodit teorii pohybu Měsíce z gravitačních principů, ale setkal jsem se s tolika četnými obtížemi, že jsem musel svoji práci a další výzkumy přerušit. Problém jsem převedl k třem diferenciálním rovnicím druhého řádu, které nejen že nelze integrovat, ale i při použití přibližných metod, které musím používat, se dostávám k velkým obtížím. Nevím tak, jak z jediné teorie gravitace lze učinit závěr, je-li vhodná pro něco užitečného...“

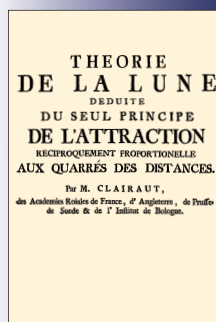
V této tzv. *nulté teorii* jsou rovnice pohybu Měsíce vyjádřeny v cylindrické soustavě, hledané souřadnice jsou zachyceny pomocí rozkladu na mocninné řady. První souřadnicí je rádius vektor, druhou délka a třetí je výška Měsíce nad rovinou ekliptiky.

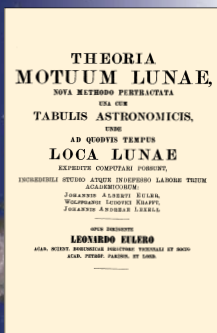
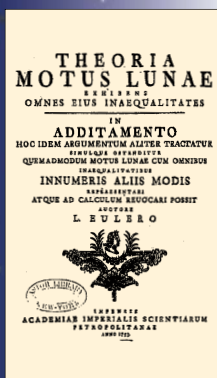
Aplikace Eulerovy teorie umožňovala mimo jiné odvození rovnic pro rychlost změn velké poloosy, excentricity a délky perigea. Podle autora obtížnost výpočtů pohybu Měsíce spočívá v tom, že jeho dráha se přesouvá po rovině ekliptiky a je k ní skloněna pod proměnným úhlem. Proto určil nejprve pro libovolný časový okamžik průsečík této dráhy s ekliptikou, tj. uzlovou přímkou, dále stanovil její sklon. Následným řešením rovnic našel polohu Měsíce na jeho dráze a odtud délku a šířku.

Metoda vytvořená Eulerem byla vhodnější pro pomocné výpočty k sestavování tabulek efemerid Měsíce, čehož využil německý astronom a matematik **Johann**



Obr. 3 Leonhard Euler (1707–1783)





Tobias Mayer (1723–1762), viz obr. 4. Vydal v *Transactions* [8] v letech 1752–1753 *Novae tabulae motuum soli set Lunae*, česky *Nové tabulky pohybu Měsíce a Slunce*, ve kterých byla chyba poloh Měsíce snížena na 1'. Pozorovací přístroje tehdejší doby již dovolovaly zjišťovat polohy obou uvedených těles s přesností 3"–5". Propočítané tabulky umožňovaly určování zeměpisné délky s přesností 0,5°. Popis metody a vztahy pro korekci chyby v délce vyvolané atmosférickou refrakcí byly publikovány až v roce 1770 v *Tabulae Motuum Soli set Lunae*, česky v *Tabulkách pohybu Slunce a Měsíce* [9]. Vdova po Mayerovi v tomtéž roce získala prémii 3 000 liber od anglického parlamentu a Euler 300 liber za konzultační pomoc. Mayerovy tabulky pro výpočet poloh Měsíce se v astronomických ročenkách používaly do roku 1823.

Eulerova nultá teorie je klasickou analytickou metodou, ve které souřadnice Měsíce, respektive dráhové elementy byly odvozovány řešením pohybových rovnic, což vyžadovalo velmi náročnou práci. Její zobecnění provedl později Charles Eugene Delaunay, jak budeme dále rozebírat.

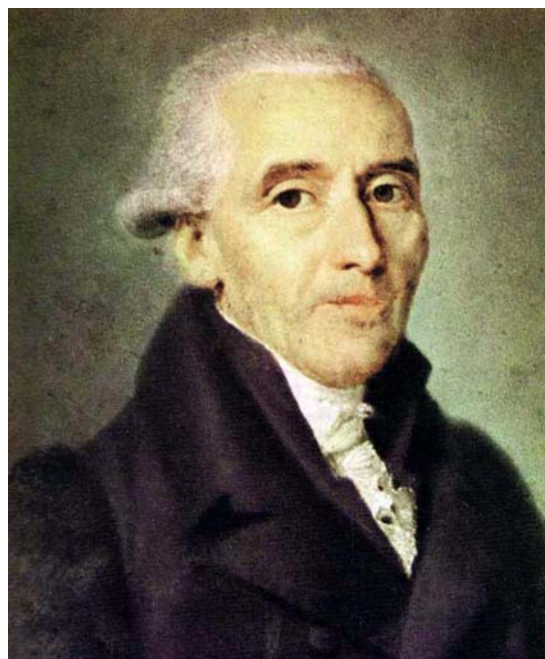
V *Additamentu*, česky v *Příloze*, titulní list (viz obr. 4) již citovaného Eulerova spisu [7] z roku 1753, nastínil autor další tzv. *první teorii* pohybu Měsíce, ještě více netradiční. Matematické zpřesnění teorie dosáhl Euler *metodou variace konstant*. Vycházel z toho, že eliptická dráha Měsíce je určena šesti dráhovými elementy. V případě „rušené dráhy“ gravitačně působí na Měsíc i Slunce, dráha je opět eliptická, její elementy se však mění. Nezkoumal poruchy v poloze Měsíce, ale v elementech, např. u velké poloosy či excentricity. Byly vyjádřeny jednoduššími vztahy, což umožňovalo výpočet efemerid Měsíce s dostatečnou přesností na delší období. Poruchy každého elementu analyzoval individuálně, přičemž zbývající považoval při výpočtech za neproměnné.

Shrnuto: Euler modeloval pohyb Měsíce v každém okamžiku pohybem po eliptické dráze s malou excentricitou. Dráhové elementy popisující velikost, tvar a polohu elipsy v prostoru se s časem měnily, jednalo se o *oskulační eliptickou dráhu*.

V letech 1753–1771 vypracoval Euler tzv. *druhou teorii* pohybu Měsíce. Výsledkem zdokonalení byl roz-



Obr. 4 Johann Tobias Mayer (1723–1762)



Obr. 5 Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

voj metody a vypočítané tabulky poloh Měsíce ve spisu *Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis*, česky *Teorie pohybu Měsíce vyložená novým způsobem a astronomické tabulky*, titulní list viz obr. [10], vydaném roku 1772 v Sankt Petěrburgu. Dílo vzniklo za pomoci syna Johanna Albrechta Eulera (1734–1800), Wolfganga Ludwiga Krafata (1743–1814) a Anderse Johanna Lexella (1740–1784), neboť Euler byl již při dokončování slepý. Druhá Eulerova teorie pohybu Měsíce měla význam především metodologický, plně pochopena byla až koncem 19. století. Přes velký pokrok při výpočtech teoretických hodnot koeficientů se propočítané tabulky poloh Měsíce vyznačovaly většími chybami než značně jednodušší poloempirické efemeridy Měsíce Mayera.

Při zvolené numericko-analytické metodě byly hodnoty některých veličin přebírány z pozorovacích údajů a dosazovány do pohybových rovnic při jejich řešení. Jinak řečeno autor vycházel jak z vybraného matematického modelu, tak z interpretace z pozorování získaných hodnot. Těmi byly například excentricita dráhy Měsíce, Země, poměr střední vzdálenosti Země – Slunce ku střední vzdálenosti Země – Měsíc. Euler dále použil hodnoty úhlů elongace Měsíce od Slunce a střední anomálie Měsíce. Poměr hmotností Země a Měsíce kladl rovný 70:1, zmiňovaný poměr vzdáleností Země – Slunce a Země – Měsíc 400:1.

Po fyzikální stránce Euler vyložil řešení problému pohybu Měsíce pod působením přitažlivosti Země a Slunce za podmínky, že všechna uvedená tělesa byla zkoumána jako hmotné body a barycentrum soustavy Země – Měsíc se pohybuje kolem Slunce po eliptické dráze. Řešil tak zjednodušený problém tří vzájemně se přitahujících těles. Byl si vědom toho, „že úplné řešení je nad možností analýzy nehledě na obrovské úsilí geometrii...“ Zkoumal pohyb Měsíce v pravoúhlých souřadnicích, získal pro jejich určení tři diferenciální rovnice druhého řádu obdobného typu jako lineární rovnice kmitavého pohybu. Podrobně rozvinul obecnou metodu řešení zmiňovaných rovnic, přičemž ji dovedl do číselných výsledků, což je považováno za nejdůležitější přínos autora zachycený v první knize zmiňovaného spisu [10].

Pohyb Měsíce zkoumal v rotujících pravoúhlých souřadných osách, přičemž osy X a Y rotovaly s rychlostí rovnou střednímu úhlovému pohybu Měsíce. Tedy jedna z os stále směřovala na střední Měsíc, tj. na zdánlivý bod pohybující se rovnoměrně po ekliptice s periodou rovnou časové délce siderického měsíce. Vlastní zpracování postupu vycházelo z již připomínané metody variace konstant.

Ke studiu pohybu Měsíce dále přispěl francouzský fyzik a matematik **Joseph Louis Lagrange** (1736–1813), viz obr. 5 Jeho význam spočíval spíše v teorii, řada jím zavedených pojmů, vztahů a rozpracovaných metod byla využita při interpretaci pohybu Měsíce. Zvítězil v soutěži Pařížské akademie věd na rok 1774, vypsané na téma „Je možné objasnit sekulární akceleraci Měsíce přitažlivostí nebeských těles nebo nesférickým tvarem Země a Měsíce?“.

Ve vítězné práci *L'Équation séculaire de la Lune*, česky *O sekulární rovnici pohybu Měsíce* [11], Lagrange zavedl pojem *poruchová funkce*, což umožnilo zjednodušit řešení problému pohybu Měsíce započtením poruch vyvolaných Sluncem. Obvykle poruchovou funkci R , viz například [12], píšeme ve tvaru

$$R = GM_s \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right),$$

kde Δ je vzdálenost mezi Měsícem a Sluncem, r je vzdálenost Země a Slunce, x, y, z jsou geocentrické souřadnice Měsíce, x', y', z' souřadnice Slunce. Obtížný pro výpočet je rozklad na mocninnou řadu členu $\frac{1}{\Delta}$ – hlavní části poruchové funkce. Druhý člen, tzv. nepřímá část poruchové funkce, je naopak pro výpočty snadnější. Historický postup při stanovení poruchové funkce spočíval v matematickém rozkladu na mocninné řady. Místo obtížné izolace výrazu zachycujícího délku Měsíce $\varphi \sim t + at^2$ navrhl Lagrange používání lépe vyjádřitelného členu $\varphi \sim t + \sin at$.

Metoda byla úspěšně použita ke korekcím pohybu Měsíce pro nesférický tvar Země. Poruchový potenciál závisí na deklinaci Měsíce vzhledem k zemskému rovníku a parametrech gravitačního pole Země, prvně popsáno Clairautem v roce 1743 v již citovaném spisu [1].

Následně Lagrange roku 1781 v [13] zobecnil princip metody interpretace keplerovského pohybu zahrnutím vektoru, který dnes nazýváme Rungeovým-Lenzovým. Jeho zavedení umožňovalo určení perigea, přesněji jeho úhlu vzhledem k uzlu měsíční dráhy.

Dalším řešeným problémem v teorii pohybu Měsíce byla tzv. *sekulární akcelerace*, kterou objevil již v roce 1695 Halley. Srovnáním s údaji Ptolemaia v *Almagestu* zjistil, že střední úhlový pohyb Měsíce se postupně zvětšoval, změna činila asi $10''$ za 100 roků. Objasnění jevu přinesl až koncem 18. století francouzský astronom, fyzik a matematik **Pierre Simon Laplace** (1749–1827) viz obr. 6, který studoval pohyb Měsíce v letech 1783–1787. Vysvětlil, že zpomalování, respektive zrychlování středního pohybu Měsíce je způsobeno dlouhodobým kolísáním excentricity zemské dráhy. Příkladem při jejím zmenšování se zvětšuje střední vzdálenost Země od Slunce, poruchové působení Slunce na Měsíc se stává menším. Mění se průměrná rychlost pohybu Měsíce, který jako detekční přístroj přijímá a zesiluje vliv gravitačních poruch rozvíjejících se ve sluneční soustavě. Laplace našel nepřímé gravitační poruchové působení planet, vyvolávající odchylky v pohybu Slunce od eliptické dráhy kolem středu hmotnosti sluneční

soustavy. Konkrétně v jeho době se střední délka Měsíce zrychlovala o $10,4''$ za 100 roků.

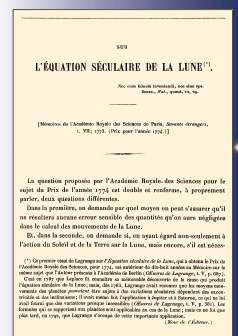
Rozvoj nebeské mechaniky Laplace zachytil v pětidílném spisu *Traité de Mécanique Céleste*, česky *Nebeská mechanika* (1799–1825) [14]. Teorie pohybu Měsíce je obsažena v třetím díle sedmé knihy vydané v roce 1802. Po úvodních dvanácti stranách následuje zhruba sto dvacet stran obtížné analýzy problému. V ní autor vychází z modifikace Keplerova pohybu v prostoru při klasickém poměru středního denního slunečního a měsíčního pohybu $m \cong \frac{3}{40}$. Výklad obsahoval nejenom interpretaci středního pohybu Měsíce, ale bral do úvahy i sekulární změny všech jeho dráhových elementů. Výsledkem bylo objasnění pohybu Měsíce při zahrnutí nesférického tvaru Země a také ukázka, jak z pozorovaných poloh Měsíce určit zploštění Země ($1/305$). Laplace při výpočtech předpokládal poměr hmotností Země a Měsíce rovný 75:1, určení polohy Měsíce dosahovalo přesnosti $\cong 30''$.

Význam gravitačního zákona pro interpretaci pohybu Měsíce Laplace rozvádí v díle *Exposition du système du Monde*, česky *Výklad světové soustavy* [15], takto: „Z výkladu nesporně vyplývá, že zákon všeobecné gravitace je jedinou příčinou všech nerovností pohybu Měsíce; jestliže přihlédneme k velkému počtu a velikosti těchto nerovností a blízkosti Měsíce od Země, můžeme ho považovat ze všech nebeských těles za nejvhodnější, aby potvrdil tento velký přírodní zákon a moc matematické analýzy, tohoto zázračného prostředku, bez kterého by lidskému rozumu nebylo možno proniknout do tak složitých teorie a který může být použit jako stejně nadějný způsob objevu jako samotná pozorování.“

První propočítané tabulky poloh Měsíce, jejichž chyby byly srovnatelné s pozorovacími, vznikly až v polovině 19. století. Vycházely z numerické metody, ve které se některé dráhové elementy stanovovaly z pozorování a následně upřesňovaly při výpočtech. Zvýšené přesnosti bylo dosaženo započtením členů až



Obr. 6 Pierre Simon Laplace (1749–1827)



LECTURES
ON
THE LUNAR THEORY
BY
JOHN COUCHE ADAMS, M.A., F.R.S.
LOND. LECTURESHIP PROFESSOR OF ASTRONOMY AND COSMOLOGY
IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE.



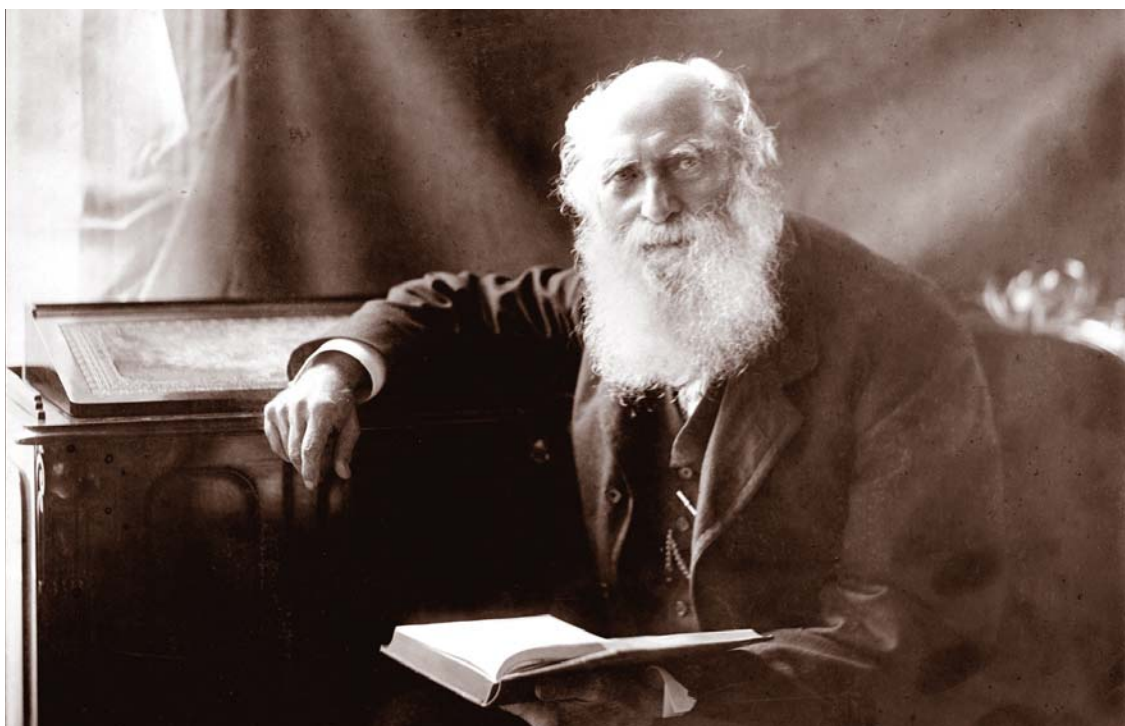
Obr. 7 Peter Andreas Hansen (1795–1874)

osmého řádu, což uplatnil dánský astronom žijící v Německu **Peter Andreas Hansen** (1795–1874), viz obr. 7, jak v práci z roku 1838 *Fundamenta nova investigationis orbitæ veræ quam Luna perlustrat*, česky *Nové základy výzkumů drah co nejpravděpodobnějších Měsíce náležející* [16], tak následně v tabulkách *Table of the Moon*, česky *Tabulky Měsíce*, vydaných v Anglii roku 1857. Detailní výklad své teorie a metod sestavování tabulek efemerid Měsíce publikoval Hansen v letech 1862–1864 pod názvem *Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen*, česky *Výklad teoretických výpočtů tabulek Měsíce použitých*

poruch [17]. Svůj postup při výpočtech Hansen charakterizoval následovně: „*Dosazuji číselné hodnoty koeficientů do výrazů a provádím s nimi násobení a integrování. Ze všech metod, které jsem používal, jde o nejkratší a nejnadějnější postup pro získání přesného výsledku... Na rozdíl od metody neurčitých koeficientů, která vyžaduje řešení mnoha podmínkových rovnic, jde rychleji a nadějněji ihned dosazovat číselné hodnoty koeficientů do známých členů rozkladu...*“ Pro výpočty dlouhoperiodických poruch Hansen vytvořil komplikovaný postup, spojil metodu variace koeficientů diferenciálních rovnic s metodou neurčitých koeficientů. Chyby ve srovnání s polohami Měsíce, pozorovanými v průběhu 100 roků v letech 1750–1850 nepřevyšovaly $\approx 1''$. Právě taková byla v polovině 19. století přesnost pozorování. Téměř současně tak dosáhla souhlasu úroveň rozvoje teoretické a pozorovací astronomie.

Ale již k roku 1875 rozdíl mezi hodnotami vypočítanými z tabulek a pozorovanými u délek Měsíce dosahoval $8''$. Proto kanadsko-americký astronom a matematik **Simon Newcomb** (1835–1909) zavedl empirické opravy do Hansenových tabulek, které se v modifikované podobě používaly až do dvacátých let 20. století. Mimo jiné se využívaly například k časovým analýzám starověkých i soudobých zatmění.

Hansen působící v německém městě Gota rovněž propočítal hodnotu sekulární akcelerace – dospěl k hodnotám nejprve $11,47''$ a následně $12,18''$. Jeho výpočty znovu přezkoumal anglický astronom a matematik **John Couche Adams** (1819–1892), viz obr. 8. Nalezl chybu v aplikaci Laplaceových výpočtů spočívající v tom, že při integrování diferenciálních pohybových rovnic Měsíce byla přijímána excentricita dráhy Země za konstantní. Teprve po integrování byla zkoumána jako funkce času, což bylo přípustné pouze v prvním přiblížení. Pro další přesnější výpočty s použitím vyšších stupňů poruchové funkce to již přijatelné nebylo [18]. Laplaceova teorie objasňovala pouze polovinu hodnoty sekulární akcelerace, druhá polovina spojená se zpomalováním zemské rotace v důsledku slapového



Obr. 8 John Couche Adams (1819–1892)

tření je rozebírána v dalším textu. Podrobný výklad Adamsovy teorie pohybu Měsíce je shrnut v [19].

Významným příspěvkem k interpretaci pohybu Měsíce navazujícím na Eulerovu nultou teorii byla analyticky čistá metoda francouzského astronoma a inženýra **Charlese Eugena Delaunayho** (1816–1872). Používala poslopnost algebraických operací s opakujícím se dosazováním. Ke zjednodušení složitých výpočtů podle algoritmů provedl Delaunay záměnu původních klasických dráhových parametrů za tzv. Delaunayovy kanonické elementy L, G, H, l, g, h , jenž jsou spojeny s elementy oskulační dráhy Měsíce kolem Země. Zavedeme označení a – velikost velké poloosy, e – excentricita, i – sklon dráhy, ω – vzdálenost perihélia od uzlu, Ω – délky výstupného uzlu, l – střední anomálie, τ – okamžik průchodu Měsíce perigeem, $\mu = n^2 a^3$ – konstanta III. Keplerova zákona, n – střední denní pohyb Měsíce vzhledem k perigeu. Platí vztahy

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} & l &= n(t - \tau) \\ G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} & g &= \pi - \Omega \\ H &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)\cos i} & h &= \Omega. \end{aligned}$$

Celkem Delaunay provedl v průběhu téměř dvaceti let práce asi 500 kanonických transformací při hledání vyjádření pro šířku, délku a sinus paralaxy Měsíce [20, 21].

Nově zavedené proměnné měly tu vlastnost, že diferenciální rovnice poruchového pohybu v nich vyjádřené se vyznačovaly následující symetrií

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{\partial R^*}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial R^*}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R^*}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial R^*}{\partial H}, \end{aligned}$$

kde $R^* = \frac{\mu^2}{2L^2} + R$, R je poruchová funkce. Vlastnosti funkce R^* předurčují pohyb těles v soustavě, v našem případě pohyb Měsíce v poruchovém gravitačním poli. Tato funkce je rovna součtu kinetické a potenciální energie $H = T + V$.

Pojem Hamiltonovy funkce H byl obecně zaveden v teoretických pracích irského fyzika a matematika **Williama Rowana Hamiltona** (1805–1865), později doplněn pruským matematikem **Carlem Gustavem Jacobem Jacobim** (1804–1851). Aplikace na pohyb Měsíce je rozvedena např. v [22]. Hlubší využití Hamiltonovy-Jacobiho rovnice na problematiku pohybu Měsíce v duchu Delaunayova postupu znamenalo tvorbu nové kanonické soustavy proměnných a následně podstatné zpřesnění výsledků.

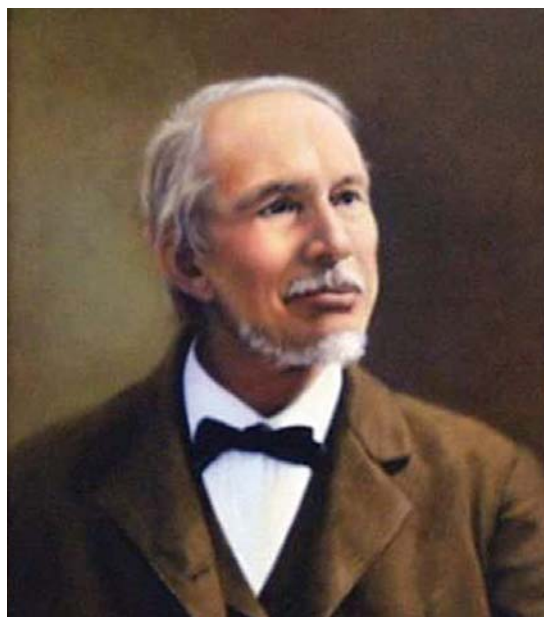
Po fyzikální stránce teorie popisovala keplerovský pohyb v soustavě Země – Měsíc, přičemž podle [6] místo dříve používané velké poloosy a byl zaveden nový člen – úhlový moment μL . Platí

$$\begin{aligned} -G \frac{M_Z M_M}{2a} &= -\mu \frac{(GM_Z M_M)^2}{2\mu^2 L^2}, \\ \text{kde } \mu &= \frac{M_Z M_M}{M_Z + M_M}, \quad L = \sqrt{G(M_Z + M_M)a}. \end{aligned}$$

Všechny koeficienty ve výrazech u vyjádření parametrů jsou vyjádřeny mocninnými řadami, obsahujícími konstanty charakterizující pohyb Měsíce, koeficienty řad jsou známá racionální čísla. Proto je celý postup použitelný nejen k našemu Měsíci, ale je aplikovatelný při výměně konstant k libovolnému dalšímu měsíci planet.

V roce 1865 Delaunay vyslovil myšlenku, že zpomalování rotace Země je vyvoláváno přílivovým tře-

ním. Ideu dále propracoval v [23] anglický astronom a fyzik **George Howard Darwin** (1845–1912), druhý syn známého přírodovědce **Charlese Roberta Darwina** (1809–1882). Fyzikální interpretace uvedeného jevu současným pohledem vychází z uplatnění zákona zachování celkového momentu hybnosti v soustavě Země – Měsíc. Ten se skládá z rotačních momentů hybnosti Země a Měsíce kolem vlastních os a dráhových momentů hybnosti obou těles kolem společného hmotného středu – barycentra. Hodnota celkového momentu hybnosti soustavy, kterou zjednodušeně považujeme z gravitačního hlediska za izolovanou, zůstává konstantní a je rovna přibližně $3,5 \cdot 10^{34} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$. Země rotuje s větší úhlovou rychlostí, než kolem ní obíhá Měsíc. Proto se přílivové výdutě zpožďují za rotací Země. Důsledkem je vznik momentu dvojice sil směřujících

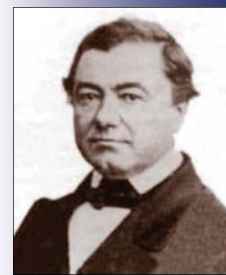


Obr. 9 George William Hill (1838–1914)

proti směru rotace Země. Dochází ke zpomalování rotace Země, tedy ke zmenšování její úhlové rychlosti. Naopak narůstá doba rotace, přírůstek za jednu otočku činí $4,4 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Pokles rotačního momentu hybnosti Země, který má velikost přibližně $5,9 \cdot 10^{33} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$, je kompenzován zvětšováním dráhového momentu hybnosti Měsíce, vyznačujícího se velikostí $2,8 \cdot 10^{34} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$. Měsíc se vzdaluje od Země, v současnosti asi $3,7 \cdot 10^{-2} \text{ m.rok}^{-1}$ rychlostí $1,1 \cdot 10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$.

Moderní výklad pohybu Měsíce postupně vytvořil od roku 1877 americký astronom a matematik **George William Hill** (1838–1914), viz obr. 9. V roce 1875 Hill charakterizoval zaměření svého bádání slovy: „Vystává otázka, zda nesoulad teorie Měsíce lze připsat chybám při aproximacích nebo silám působícím na Měsíc, které nebyly uvažovány.“ Při řešení problematiky navazoval na Eulerovu tzv. druhou teorii, zkoumal pohyb Měsíce v pravoúhlé soustavě souřadnic s rotujícími osami. Rozdílně od Eulera však osa X směřovala na střední Slunce, tedy na rovnoměrně pohybující se objekt po ekliptice. Osa Y ležela v rovině ekliptiky kolmo k ose X , osa Z tvořila normálu k ekliptice.

Hill sestavil a řešil soustavu diferenciálních rovnic pohybu Měsíce v pravoúhlých souřadnicích, kde položil $z = 0$ a hledal periodické řešení pro souřadnice x a y ve tvaru nekonečných trigonometrických řad. V rovině xy jsou rovnice pohybu



Charles Eugen Delaunay





Obr. 10 Ernest William Browne (1866–1938)

$$\frac{dx^2}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} + \left[\frac{(M_Z + M_M)G}{r^3} - 3n'^2 \right] x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} + \frac{(M_Z + M_M)G}{r^3} y = 0, \text{ kde } r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Podařilo se mu vyjádřit tzv. *variační křivku* zachycující poruchovou dráhu Měsíce, která byla lepším vyjádřením než keplerovská elipsa – zahrnovala základní část poruchového působení Slunce. Souřadnice Měsíce byly vyjádřeny ve tvaru periodických řad, jejich koeficienty spolu souvisely jednoduchými vztahy, výsledky jsou shrnuty v [24, 25]. Aplikace popsané metody umožnila zachytit rychlosti pohybu perigea analyticky, viz [26].

Přesnější podobu analytické teorii pohybu Měsíce dal později anglický astronom a matematik působící v USA **Ernest William Browne** (1866–1938), viz obr. 10. Východiska jeho práce s analýzou předností a nedostatků jsou shrnuty v [27, 28]. Rozložil do mocninných řad obsahujících přes 300 členů pro délku, šířku a paralaxu Měsíce s chybou menší než $\pm 0,01$ ". Při výpočtech vzal do úvahy poruchy nejen Slunce, ale i nepřímé působení planet na Slunce a nesférické tvary Země a Měsíce. Skromně Brown u příležitosti zakončení díla prohlásil: „*Moje vlastní teorie, která byla dokončena před několika léty, je spíše završením posledních myšlenek jiných, než novou módou při výzkumu měsíčního pohybu.*“

Později pro výpočet efemerid Měsíce vytvořil Brown na 660 stranách speciální tabulky [29], jedny z posledních svého druhu. Historicky první, ale mnohem jednodušší, sestavil do páté knihy *Almagestu* Ptolemaios. Práce s Brownovými tabulkami vyžadovala dovednost interpolace a sčítání k nalezení souřadnic Měsíce na obloze v určitém čase. Od počátku dvacátých let 20. století byly zmiňované tabulky celosvětově využívány pro výpočet poloh Měsíce.

Metody vytvořené pracemi Hilla a Browna obsahovaly vztahy, které zahrnovaly v rozvoích mocninných řad stovky členů. V dnešní době pomocí počítačů byly pracné výpočty urychleny a tabulky podstatně zdokonaleny. Proto můžeme určovat polohu Měsíce s velkou přesností.

Účelem článku bylo podat přehled historie výkladu pohybu Měsíce ve zvoleném období. Z tohoto důvodu se

text zabývá pouze některými vybranými osobnostmi, na jejichž díle je vývoj názorů demonstrován. Významné pro pokrok, i přes určitou rivalitu, bylo rovněž vzájemné ovlivňování badatelů při řešení problémů pohybu Měsíce, jak lze v řadě případů doložit obdobným postupem a korespondencí (viz např. Clairaut – Euler).

Literatura

- [1] A. C. Clairaut: „De l'orbite de la Lune dans le systeme de M. Newton“, *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris.* 17 (1743).
- [2] C. A. Wilson: „Perturbations and solar tables from Lacaille to Delambre: the reapprochement of observation and theory, Part I.“, *Arch. Hist. Exact Sci.* 22, 54 (1980).
- [3] F. F. Tisserand: *Traité de Mécanique Céleste*. Tom III, Jacques Gabay, Paris 1894.
- [4] A. Cook: „Success and failure in Newton's lunar theory“, *Astron. & Geophys.* 41(6), 21 (2000).
- [5] A. C. Clairaut: *Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances*. St. Petersburg, 1752.
- [6] M. C. Gutzwiller: „The oldest three – body problem“, *Rev. Mod. Phys.* 70, 589 (1998).
- [7] L. Euler: *Theoria motus Lunae exhibens omnes eius inaequalitates in additamento*. Academiae imperialis scientiarum, Petropolitanae Anno. 1753.
- [8] T. Mayer: *Transactions Königlische Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Göttingen, 1752, 1753.
- [9] T. Mayer: *Tabulae Soli set Lunae Novae et Correctae*. London 1770.
- [10] L. Euler: *Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis*. St. Petersburg 1772.
- [11] J. L. Lagrange: „L'équation séculaire de la Lune“, *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris* 335 (1773).
- [12] V. A. Bronštejn: *Kak dvizetsja Luna?* Nauka, Moskva 1990.
- [13] J. L. Lagrange: *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin (1781).
- [14] P. S. Laplace: *Traité de Mécanique céleste*. Paris 1798–1825.
- [15] P. S. Laplace: *Exposition du système du Monde*. Paris, 1796.
- [16] P. A. Hansen: *Fundamenta nova investigationis orbitae quam luna perlustrat*. Gotha 1838.
- [17] P. A. Hansen: „Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen“, *Abh. der K. Sächs. Gesell. der Wissenschaften* 6, 91 (1862); 7, 1 (1864).
- [18] J. C. Adams: „On the secular variation of the Moon's mean motion“, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 14, 59 (1853).
- [19] J. C. Adams: *Lectures on the Lunar Theory*. Cambridge University Press, Cambridge 1900.
- [20] C. E. Delaunay: „Mémoire sur une nouvelle méthode pour la détermination du mouvement de la Lune“, *C. R. Acad. Sci.* 22, 32 (1846).
- [21] C. E. Delaunay: „La Théorie du mouvement de la lune“, *Mém. Acad. Sci.* 28–29, 1860.
- [22] M. Jacobi: „Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps“, *Astronom. Nach.* 20, 81 (1842).
- [23] G. H. Darwin: „On the secular effects of tidal friction“, *Astronom. Nach.* 96, 217 (1880).
- [24] G. W. Hill: *On the Part of the Motion of the Lunar Perigee, which Is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon*. J. Wilson and Son, Cambridge, Mass. 1877.
- [25] G. W. Hill: „Researches in the lunar theory“, *Amer. J. Math.* I, 5, 129 (1878).
- [26] G. W. Hill: „Mr. Hill's paper on the motion of the Moon's perigee“, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 38, 192, (1878).
- [27] E. W. Brown: *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*. Cambridge University Press, Cambridge 1896.
- [28] E. W. Brown: „Theory of the motion of the Moon; Containing a new calculation of the expressions for the coordinates of the Moon in terms of the time“, *Mem. R. Astron. Soc.* 53, 39 a 163; 54, 1; 57, 51; 59, 1 (1897–1908).
- [29] E. W. Brown: *Tables of the Motion of the Moon*. Yale University Press, New Haven CT 1919.