Astronomické úlohy s historickými náměty

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Kotlářská 2, 611 37 Brno, stefl@physics.muni.cz

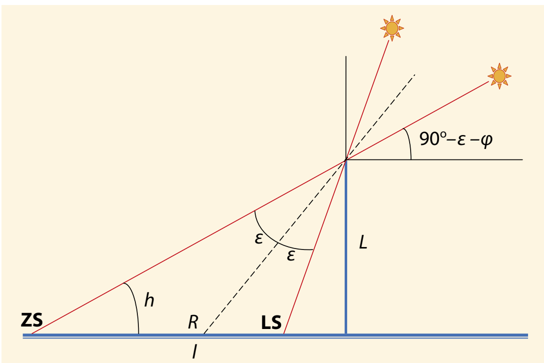
Pro výuku neoblíbené fyziky na středních školách je důležitá vhodná motivace, jejíž značný potenciál má historie astronomie. K jeho rozvinutí jsou v článku shromážděny jednoduché kvantitativní astronomické úlohy, vycházející z historických postupů i původních hodnot v nich používaných. Interpretace úloh je přizpůsobena středoškolské úrovni, opírá se o matematická odvození, přičemž vždy je vyzdvihována především zjednodušená podstata sledovaného jevu. Úlohy mají poznávací charakter a mohou tak výrazně přispět k motivaci ve výuce fyziky.

Astronomie při svém vzniku ve starověku vycházela z pozorování, zkoumala směry světelných paprsků z kosmických těles, při jejich analýze se opírala o trigonometrii a matematiku, byla astrometrií. Důvtipnými metodami opírajícími se zpravidla o geometrické úvahy dokázali astronomové určovat správně některé vzdálenosti nejbližších kosmických těles, např. Měsíce. V novověku umožnilo matematické zpracování pozorovacích poloh planet formulovat kinematické zákonitosti jejich pohybu. Aplikace objeveného gravitačního zákona vedla ke studiu dynamiky pohybu kosmických těles a vzniku nebeské – kosmické – mechaniky. Rozvoj moderní fyziky podnítil vznik astrofyziky, zabývající se převážně fyzikálními a chemickými vlastnostmi hvězd a jejich vývojem v čase. Pořadí úloh v článku vychází z časové historické osy, začneme starověkem.

Znalost pochází od stínu a stín od gnómonu

(Chou-pei Suan-king, 1100 př. n. l.)

V záznamech kroniky Zhoubi jsou zachyceny údaje o pozorování Slunce čínskými astronomy v období před naším letopočtem za použití gnómonu o výšce osmi chi (jde o délkovou jednotku 1 chi = 10 cun, 1 cun ≅ 2,44 cm). Při letním slunovratu činila délka jeho stínu 1,70 chi, zatímco při zimním slunovratu 13,60 chi.



Obr. 1 Schéma gnómonu.

Obr. 2 Čínský bronzový gnómon.

Úloha

Stanovte z výše uvedených údajů zeměpisnou šířku místa pozorování a tehdejší sklon ekliptiky.

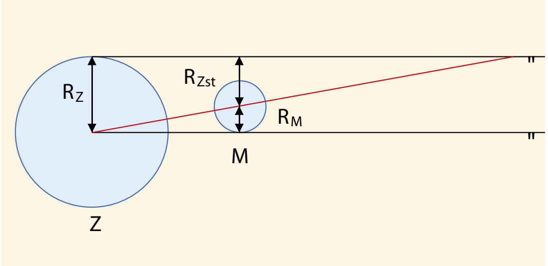
Řešení

Korekce spojené s atmosférickou refrakcí a poloměrem Slunce budeme zanedbávat. Pro výšku Slunce používáme vztah $h_{max} = 90° + \varepsilon - \varphi$ při letním slunovratu (LS), zatímco při zimním (ZS) platí $h_{min} = 90° - \varepsilon - \varphi$, viz obr. 1. Úpravou obdržíme $\varphi = 90° - \frac{h_{max} + h_{min}}{2}$ a $\varepsilon = \frac{h_{max} - h_{min}}{2}$. Na obr. 2 je zachycen čínský gnómon z bronzu o výšce 8 chi, tj. 1,95 m.

Pomocí dnes používané trigonometrické funkce tangens můžeme zapsat vztah $\mathrm{tg}\, h = \frac{L}{l}$, kde L je výška gnómonu a l délka jeho stínu. Dosazením určíme výšku Slunce při zimním slunovratu $h_{min} = 30°27'36''$ a letním slunovratu $h_{max} = 78°00'13''$, $\varphi = 90° - \frac{h_{max} + h_{min}}{2} = 35°46'18''$. Podle analýzy v [1] bylo pravděpodobným místem pozorování severní okolí nynějšího velkoměsta Luoyang, ležícího na zeměpisné šířce $\varphi = 34°40'11''$. Hodnota určeného sklonu ekliptiky činila $\varepsilon = \frac{h_{max} - h_{min}}{2} = 23°47'18''$.

V roce 1976 schválila Mezinárodní astronomická unie (IAU) empirický vztah pro výpočet sklonu ekliptiky ε =

» Pohyby planet dokážeme poměrně přesně spočítat a předpovídat. «



Obr. 3 Schéma stanovení vzdálenosti Měsíce při jeho zatmění.

$23°26'21{,}488'' - 46{,}8150''\,T - 0{,}00059''\,T^2 + 0{,}001813''\,T^3$, kde T je juliánské století od roku 2000. Dosazením 5. stol. př. n. l. obdržíme $\varepsilon = 23°45'24''$, což je v relativně dobrém souladu hodnotou ε určenou pomocí gnómonu. Rozbor čínských pozorování Slunce a jejich přesnosti nalezneme v české publikaci [2].

Jaká je vzdálenost Měsíce od Země?

První stanovení vzdálenosti nám nejbližšího kosmického tělesa Měsíce pochází od antického řeckého astronoma Hipparcha (190–120 př. n. l.). Jeho řešení vtipně využívá zatmění Měsíce (viz obr. 3).

Při jeho sledování zjistil, že úhlový poloměr Měsíce je 16′ a poloměr zemského stínu ve vzdálenosti Měsíce 40′, tj. zhruba (8/3)krát větší. Poloměr Měsíce je roven rozdílu poloměrů Země a zemského stínu $R_M = R_Z - R_{Zst}$. Odtud $R_M \approx \frac{3}{11} R_Z$, což odpovídá současným údajům o velikosti Měsíce. Po nalezení lineárního poloměru Měsíce, při znalosti úhlového poloměru a skutečnosti, že úhlový poloměr Měsíce je přibližně roven úhlovému poloměru Slunce, obdržel pro vzdálenost Měsíce $r_{ZM} \approx \frac{R_M}{\mathrm{tg}\,16'} \approx 218\,R_M \approx 59\,R_Z$.

Podle jakých zákonitostí se pohybují planety?

V dnešní době dokážeme pohyby planet pomocí pohybových zákonů relativně přesně spočítat a předpovídat. Víme však, že zákonitosti těchto pohybů byly zjištěny na základě pozorování a geometrických úvah ještě předtím, než Newton pohybové zákony formuloval. Německý astronom a matematik Johannes Kepler (1571–1630) v Praze sepsal a v Heidelbergu vydal roku 1609 spis Astronomia nova (Nová astronomie) [3], jehož titulní list je na obr. 4. Ve spisu nalezneme formulace prvních dvou *Keplerových zákonů* i způsob jejich objevení, který je nepochybně zajímavý.[1]

Druhý Keplerův zákon vznikl z analýzy pohybu Země, kterou Kepler prováděl k vystižení nepravidelností spojených s pohybem pozorovatele. Vycházel z myšlenky, že síla pohybující planetami má původ ve Slunci. Zjistil, že rychlost Země je větší v perihéliu a menší v aféliu, její pohyb je tedy nerovnoměrný. Analýzou pohybu Země dospěl k závěru, že doba, za kterou Země urazí stejně malé, stejně dlouhé úseky dráhy, je přímo úměrná její vzdálenosti od Slunce. To jej přivedlo na myšlenku, že „doba potřebná k tomu, aby planeta opsala oblouky stejné délky, by mohla být měřena prostřednictvím plochy opsané průvodičem planety za tuto dobu“, resp. že „vzdálenosti planety od Slunce jsou v této ploše obsaženy“.[2] Pracoval pak s plochou, kterou obepínala křivka dráhy planety, tak, že ji rozložil na velký počet trojúhelníků. Kepler pochopitelně neměl k dispozici aparát pro korektní matematické úvahy. Jeho postup však představuje počátek historické linie postupně směřující k dnešnímu pojmu plošné rychlosti. Výše uvedené úvahy se časově vztahují k roku 1601, kdy byl druhý Keplerův zákon ploch objeven. Později následovalo jeho ověřování pro případ pohybu Marsu, jehož dráha se vyznačuje větší excentricitou, vzdálenosti Marsu od Slunce v aféliu a perihéliu se liší o 20 % vzdálenosti v perihéliu. Ve zmiňované Nové astronomii [3] nalezneme různé formulace zákona plošných rychlostí (podrobnou analýzu lze najít v [4]).

Dnes používáme nejčastěji tento český překlad původního historického textu (viz [5]): *Rychlost planety se mění tak, že úsečka spojující Slunce a planetu opisuje za stejný čas stejné plochy. Druhého Keplerova zákona můžeme využít k řešení následující úlohy:*

Úloha (výpočet plošných rychlostí Marsu a Jupitera)

Určete velikosti plošných rychlostí Marsu a Jupitera. Známe $a_M = 227{,}9 \cdot 10^6$ km, $e_M = 0{,}0934$, $T_M = 1{,}8807$ roku, $a_J = 778{,}4 \cdot 10^6$ km, $e_J = 0{,}0484$, $T_J = 11{,}8565$ roku. Výsledek diskutujte.

Řešení

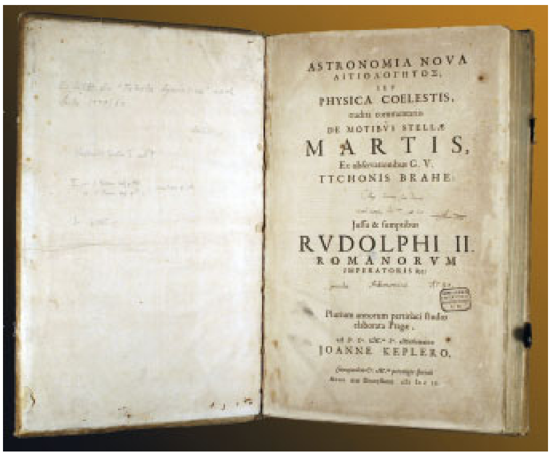
Pro excentricitu platí vztah $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, odtud stanovíme velikost vedlejší poloosy b pro obě planety. Plošnou rychlost vypočteme ze vztahu $v_{pl} = \frac{P}{t} = \frac{\pi ab}{3{,}15576 \cdot 10^7\,T}$ (periodu T dosazujeme v letech). Obdržíme $v_{pl,M} = 2{,}73 \cdot 10^{15}$ m^2 s^{-1}, $v_{pl,J} = 5{,}08 \cdot 10^{15}$ m^2 s^{-1}. Větší plošná rychlost Jupitera je důsledkem přibližně 3,5krát větší vzdálenosti této planety od Slunce oproti Marsu. Jeho dráha se vyznačuje zhruba dvojnásobnou excentricitou, obecně se však obě dráhy příliš neliší od kružnic. Střední oběžná rychlost Marsu 24,13 km s^{-1} je asi dvojnásobná než v případě Jupiteru 13,07 km s^{-1}.[3]

---

1 Při čtení textu postrádáme zvýrazněné vyznačení důležitých partií obvyklé v současných knihách, a to zejména u druhého Keplerova zákona, jehož znění je vnořeno do průběžného textu.

2 „The time required for a planet to traverse equal length of arc could be measured by the area of the region swept out from the Sun.“, resp. „It struck him thought that the distances from the Sun to these points were contained in the area of the orbital plane.“ – viz http://www.keplersdiscovery.com/AstronomiaNova.html.

3 Myšlenka o rozdílné rychlosti pohybu Země byla nepřímo potvrzena již astronomy ve starověku, kteří na základě pozorování Slunce zjistili jeho nerovnoměrný pohyb a nestejnou délku ročních období. To je ve skutečnosti zapříčiněno měnící se rychlostí pohybu Země po eliptické dráze kolem Slunce.



Obr. 4 Titulní list Astronomia Nova.

Lze určit vzdálenost Slunce?

Zjištění délky poledníku a následné upřesnění zemského poloměru francouzským astronomem a matematikem **Jeanem Picardem (1620–1682)** v roce 1671 umožnilo využít v září 1672 velkou opozici Marsu ke stanovení vzdálenosti Země – Slunce. Ze dvou míst na Zemi, z Cayenne ve Francouzské Guyaně francouzský astronom a matematik **Jean Richer (1630–1696)** a z Paříže francouzský astronom italského původu **Giovanni Domenico Cassini (1625–1712)**, proměřili paralaktický posun polohy Marsu vzhledem k pozadí hvězd ze souhvězdí Vodnáře. Poloha Slunce, Země a Marsu v prostoru je zachycena na obr. 5 (obrázek nezachovává měřítka velikostí a vzdáleností kosmických těles, například Země je zvětšena).

Platí vztahy $\sin p_\mathrm{S} = \frac{R_\mathrm{Z}}{a}$ a $\sin p_\mathrm{M} = \frac{R_\mathrm{Z}}{a'-a}$. Porovnáním a úpravou obdržíme $\sin p_\mathrm{S} = \left(\frac{a'}{a}-1\right)\sin p_\mathrm{M}$. Paralaxy Slunce a Marsu jsou velmi malé, jejich siny můžeme nahradit přímo úhly v radiánech $p_\mathrm{S} = \left(\frac{a'}{a}-1\right)p_\mathrm{M}$. Pomocí třetího Keplerova zákona určíme poměr hodnot a' a a, dosazením hodnoty úhlu p_M, zjištěné pozorováním, pak určíme paralaxu Slunce p_S.

Postupujeme přitom tak, že nejprve nalezneme vztah mezi astronomickou jednotkou AU, odpovídající definitoricky vzdálenosti a, a vzdáleností d Země – Mars při perihéliové opozici Marsu, jak je podrobně rozvedeno v [6]. K určení velikosti zlomku použijeme třetí Keplerův zákon, platí $a^3 = kT_\mathrm{Z}^2$ pro Zemi a vztah

$$\left(\frac{a'}{1-e_M}\right)^3 = kT_M^3$$

pro Mars, k je numerická konstanta, oběžné doby činí $T_\mathrm{Z} = 365{,}25$ dne a $T_\mathrm{M} = 686{,}98$ dne. Excentricita dráhy Marsu byla známa $e_\mathrm{M} = 0{,}0934$, tedy $(1-e_\mathrm{M})^3 = 0{,}7451$. Zavedeme $d = a' - a$, rovnice podělíme a obdržíme

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^3 = \left(\frac{a+d}{a}\right)^3 = \left(1+\frac{d}{a}\right)^3 =$$

$$= 1+\left(\frac{d}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{d}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{d}{a}\right) = 0{,}7451\left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2.$$

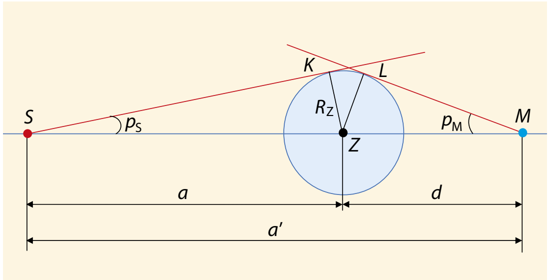
Dosazením numerických hodnot do pravé strany a zvolením $\frac{d}{a} = x$ získáme kubickou rovnici $x^3 + 3x^2 + 3x = 1{,}6357$, jejímž řešením nalezneme $x = \frac{d}{a} = 0{,}3813$. Odtud vyjádříme vzdálenosti Země – Slunce $a = \frac{d}{0{,}3813} = 2{,}622\,d$.

Úloha

Určete paralaxu Slunce p_S, jestliže na základě Cassiniho a Richerových měření [7, 8] byla nalezena paralaxa Mars $p_\mathrm{M} = 25''$.

Řešení

Dosazením do rovnice $p_\mathrm{S} = \left(\frac{a'}{a}-1\right)p_\mathrm{M}$ při $p_\mathrm{M} = 1{,}2\cdot10^{-4}$ rad obdržíme $p_\mathrm{S} = 4{,}6\cdot10^{-5}$ rad, tedy $9{,}5''$. Hodnota astronomické jednotky nalezená roku 1672 byla $r(\mathrm{AU}) = \frac{R_\mathrm{Z}}{p_\mathrm{S}} = 1{,}386\cdot10^{11}$ m. V současné době je hodnota astronomické jednotky stanovena velmi přesně, 1 AU = (149 597 870 700) m. Chyba původního stanovení činila přibližně 8 %. Vzdálenost obou míst na Zemi při simultánním pozorování je vzhledem ke vzdálenosti Marsu i při velké opozici velmi malá, tudíž paralaktická změna polohy planety vůči hvězdám v pozadí je nepatrná. Při omezené přesnosti pozorování z povrchu Země dané vlastnostmi atmosféry je chyba měření relativně velká. Vlastní realizace metody s sebou nesla další chyby spojené s menší přesností určování času pomocí kyvadlových hodin, obtížností zaměření na střed disku Marsu a stanovení poloh hvězd.



Obr. 5 Schéma polohy těles při opozici Marsu.

» Edmond Halley sestavil v roce 1705 první katalog drah komet. «

Jak daleko od Slunce se vzdaluje Halleyova kometa?

Anglický matematik a astronom Edmond Halley (1656–1742) sestavil v roce 1705 první katalog drah komet [9], do kterého zahrnul 24 objektů. Jejich dráhové elementy propočítané Newtonovou metodou porovnal (viz obr. 6). V záhlaví tabulky si všimněte předpokládaného parabolického tvaru drah. Zjistil podobnost drah komet z let 1531, 1607, 1682. Uvědomil si, že nejde o tři různé komety, nýbrž o jednu periodickou, s oběžnou dobou přibližně 76 roků. Kometa se pohybovala po eliptické dráze, která se v blízkosti perihélia příliš nelišila od parabolické. Jejího návratu v roce 1759 se již Halley nedočkal.

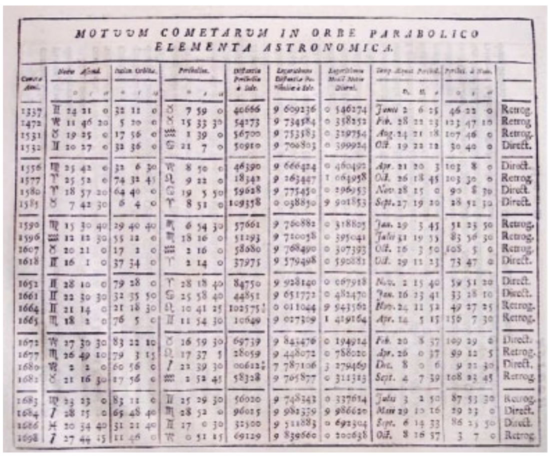
Astronomové dříve mohli pozorovat komety právě až v blízkosti perihélia, proto bylo odlišení obou typů drah značně obtížné. Dráhové elementy Halleyovy komety se při návratech mění v rozmezí řádově 2–3 %, což je vyvoláno rozdílností poruchového působení velkých planet, především Jupitera a Saturna.

Úloha

16. prosince 1835 zaznamenali astronomové průlet Halleyovy komety perihéliem ve vzdálenosti $q_\mathrm{H} = 0{,}52$ AU. Do jaké vzdálenosti se kometa následně vzdálila od Slunce? Zjistěte hodnotu jejího afélia, jestliže oběžná doba činila 76,27 roku.

Řešení

Využijeme III. Keplerův zákon ve tvaru $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}M_\mathrm{S}$, hmotnost komety $2\cdot10^{14}$ kg vzhledem k hmotnosti Slunce $M_\mathrm{S} = 2\cdot10^{30}$ kg zanedbáváme, určíme velikost velké poloosy $a_\mathrm{H} = 2{,}69\cdot10^{12}$ m $= 17{,}97$ AU.

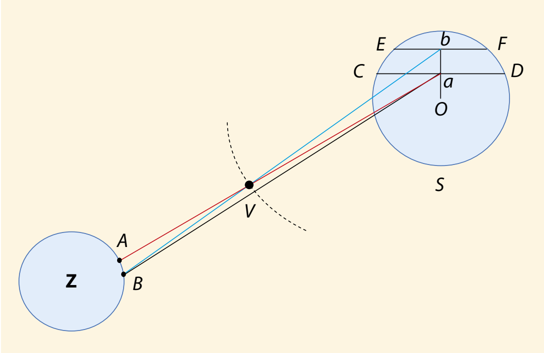


MOTUUM COMETARUM IN ORBE PARABOLICO ELEMENTA ASTRONOMICA.

Comet. Anni	Nodus Ascend.	Inclin. Orbitæ	Perihelion	Distantia Perihelii a Sole	Logarithmus Distantiæ Perihelii a Sole	Logarithmus Motus Medii Diurni	Temp. Æquat. Perihel.	Perihel. a Nodo	
1337	♊ 24 21 0	32 11 0	♉ 7 59 0	40666	9 609236	0 546274	Junii 2 6 25	46 22 0	Retrog.
1472	♑ 11 46 20	5 20 0	♉ 15 33 30	54273	9 734584	0 358252	Feb. 28 22 23	123 47 10	Retrog.
1531	♉ 19 25 0	17 56 0	♒ 1 39 0	56700	9 753583	0 329754	Aug. 24 21 18	107 46 0	Retrog.
1532	♊ 20 27 0	32 36 0	♋ 21 7 0	50910	9 706803	0 399924	Oct. 19 22 12	30 40 0	Direct.
1556	♍ 25 42 0	32 6 30	♑ 8 50 0	46390	9 666424	0 460492	Apr. 21 20 3	103 8 0	Direct.
1577	♈ 25 52 0	74 32 45	♌ 9 22 0	18342	9 263447	1 064958	Oct. 26 18 45	103 30 0	Retrog.
1580	♈ 18 57 20	64 40 0	♋ 19 5 50	59628	9 775450	0 296953	Nov. 28 15 0	90 8 30	Direct.
1585	♉ 7 42 30	6 4 0	♈ 8 51 0	109358	0 038850	9 901853	Sept. 27 19 20	28 51 30	Direct.
1590	♍ 15 30 40	29 40 40	♏ 6 54 30	57661	9 760882	0 318805	Jan. 29 3 45	51 23 50	Retrog.
1596	♒ 12 12 30	55 12 0	♏ 18 16 0	51293	9 710058	0 395041	Julii 31 19 55	83 56 30	Retrog.
1607	♉ 20 21 0	17 2 0	♒ 2 16 0	58680	9 768490	0 307393	Oct. 16 3 50	108 5 0	Retrog.
1618	♊ 16 1 0	37 34 0	♈ 2 14 0	37975	9 579498	0 590881	Oct. 29 12 23	73 47 0	Direct.
1652	♊ 28 10 0	79 28 0	♈ 28 18 40	84750	9 928140	0 067918	Nov. 2 15 40	59 51 20	Direct.
1661	♊ 22 30 30	32 35 50	♋ 25 58 40	44851	9 651772	0 482470	Jan. 16 23 41	33 28 10	Direct.
1664	♊ 21 14 0	21 18 30	♌ 10 41 25	102575	0 011044	9 943562	Nov. 24 11 52	49 27 25	Retrog.
1665	♏ 18 2 0	76 5 0	♊ 11 54 30	10649	9 027309	1 419164	Apr. 14 5 15	156 7 30	Retrog.
1672	♑ 27 30 30	83 22 10	♉ 16 59 30	69739	9 843476	0 194914	Feb. 20 8 37	109 29 0	Direct.
1677	♏ 26 49 10	79 3 15	♌ 17 37 5	28059	9 448072	0 788020	Apr. 26 0 37	99 12 5	Retrog.
1680	♑ 2 2 0	60 56 0	♐ 22 39 30	00612	7 787106	3 279469	Dec. 8 0 6	9 22 30	Direct.
1682	♉ 21 16 30	17 56 0	♒ 2 52 45	58328	9 765877	0 311313	Sept. 4 7 39	108 23 45	Retrog.
1683	♍ 23 23 0	83 11 0	♊ 25 29 30	56020	9 748343	0 337614	Julii 3 2 50	87 53 30	Retrog.
1684	♐ 28 15 0	65 48 40	♏ 28 52 0	96015	9 982339	9 986620	Maii 29 10 16	29 23 0	Direct.
1686	♓ 20 34 40	31 21 40	♊ 17 0 30	32500	9 511883	0 692304	Sept. 6 14 33	86 25 50	Direct.
1698	♐ 27 44 15	11 46 0	♑ 0 51 15	69129	9 839660	0 200638	Oct. 8 16 57	3 7 0	Retrog.

Obr. 6 Halleyova tabulka dráhových elementů komet.

» Perihélium Halleyovy komety se nachází mezi drahami Merkuru a Venuše. «



Obr. 7 Schéma přechodu Venuše přes sluneční disk.

Dále platí $q_{\mathrm{H}} = a_{\mathrm{H}}(1-e_{\mathrm{H}})$, odkud nalezneme excentricitu $e_H = 0{,}97$. Dráha má značnou excentricitu, je výrazně protáhlou elipsou. Velikost afélia činila $Q_{\mathrm{H}} = a_{\mathrm{H}}(1+e_{\mathrm{H}}) = 35{,}40$ AU. Perihélium Halleyovy komety se nachází mezi drahami Merkuru a Venuše, zatímco afélium mezi drahami Neptuna a Pluta.

Je k něčemu užitečný přechod Venuše přes sluneční disk?

V roce 1716 Edmond Halley navrhl metodu stanovení astronomické jednotky prostřednictvím časových měření přechodu Venuše přes sluneční disk z různých míst na Zemi (viz [10]). Paralaktický posuv polohy Venuše vytváří geometrickou odlišnost chord, kterou lze převést na časovou za pomoci vyjádření úhlové rychlosti pohybu Venuše po slunečním disku při pozorování ze Země. Zjednodušeně vyložíme podstatu metody: Halley vycházel z třetího Keplerova zákona, ze kterého při znalosti oběžných dob Venuše $T_{\mathrm{V}} = 224{,}70$ dní a Země $T_{\mathrm{Z}} = 365{,}25$ dní nalezl velikost velké poloosy dráhy Venuše $a_{\mathrm{VS}} = 0{,}72$ v jednotkách vzdálenosti Země – Slunce. Dále platí $\frac{a_{\mathrm{ZV}}}{a_{\mathrm{VS}}} = \frac{0{,}28}{0{,}72}$, kde a_{ZV} je vzdálenost Země – Venuše. Na sluneční disk se polohy Venuše z pozorovacích stanovišť na Zemi A a B, promítají do bodů a, b vzdálených vzhledem k zadání úlohy v dalším odstavci $13\,000 \cdot \frac{7{,}2}{2{,}8} = 33\,500$ km, $\measuredangle AVB = \measuredangle aVb$ (viz schematický obr. 7, obrázek nezachovává měřítka velikostí a vzdáleností kosmických těles). Velikost hledaného úhlu $\measuredangle aVb$ = 33 500/108 000 000 = 0,000 3 rad = 60″ je srovnatelná s velikostí kotoučku Venuše na disku Slunce, neboť ten má úhlový průměr 12 000/41 600 000 = 0,000 29 rad = 60“. Měření je tudíž realizovatelné.

Úloha

Přechod Venuše přes sluneční disk byl sledován 3. června roku 1769 v bodě A slovenským astronomem Maxmiliánem Hellem (1720–1792) v severním Norsku ve Vardø se souřadnicemi 70°20′36″ severní šířky a 30°51′ 17″ východní délky a v bodě B anglickým cestovatelem Jamesem Cookem (1728–1779) a anglickým astronomem Charlesem Greenem (1735–1771) na Tahiti v Papeete o souřadnicích 17°40′ jižní šířky a 149°25′ západní délky, pozorované chordy viz obr. 8. Časy průchodu Venuše podle [11] v uvedených místech mezi vnitřními kontakty postupně činily $5^{\mathrm{h}}53^{\mathrm{m}}14^{\mathrm{s}}$ a $5^{\mathrm{h}}30^{\mathrm{m}}4^{\mathrm{s}}$. Stanovte paralaxu Slunce.

Řešení

Pozorovací stanoviště jsou podle [12] vzdálena 14 000 km. Bereme-li v úvahu, že jde o vzdálenost měřenou po povrchu zeměkoule, je nejkratší vzdálenost menší, přibližně rovna průměru Země, zaokrouhleně 13 000 km. Úhlový poloměr Venuše klademe $R_{\mathrm{V}} = 0{,}5'$, Slunce $R_{\mathrm{S}} = 16'$, tedy 32krát větší než Venuše. V souladu s geometrií na obrázcích platí

$$\frac{\measuredangle bBa}{\measuredangle AaB} = \frac{a_{\mathrm{VS}}}{a_{\mathrm{ZV}}} \Rightarrow \measuredangle AaB = \measuredangle bBa \frac{a_{\mathrm{ZV}}}{a_{\mathrm{VS}}} \text{ a dále,}$$

$$p_{\mathrm{S}} \cdot AB = \measuredangle AaB \cdot R_{\mathrm{Z}} \Rightarrow p_{\mathrm{S}} = \measuredangle bBa \frac{a_{\mathrm{ZV}}}{a_{\mathrm{VS}}} \frac{R_{\mathrm{Z}}}{AB} \Rightarrow$$

$$p_{\mathrm{S}} = \measuredangle bBa \frac{a_{\mathrm{ZV}}}{a_{\mathrm{VS}}} \frac{R_{\mathrm{Z}}}{AB},$$

kde $AB = 2R_{\mathrm{Z}}$. Při určování $\measuredangle bBa$ nejprve stanovíme vzdálenost ab obou chord na disku Slunce užitím Pythagorovy věty, následně ji vyjádříme pomocí časových měření. Její velikost závisí na poměru rozdílu časových délek přechodů po obou chordách a hypotetického přechodu Venuše přes celý průměr disku Slunce. Časový interval průchodu je určen vnitřními dotyky. Předpokládáme konstantní úhlovou rychlost přesunu Venuše $\omega_{\mathrm{VS}} = 0{,}067\,2''\,\mathrm{s}^{-1}$, podrobné odvození viz [13]. Následující rovnice zachycuje pozorovaný paralaktický posuv Venuše vzhledem k Slunci pro pozorovatele na Zemi, vyjádřený v úhlových minutách:

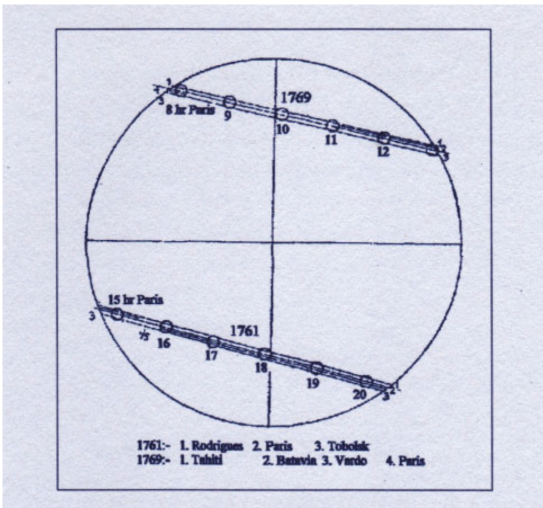
$$\measuredangle bBa = \measuredangle(bO - aO) =$$

$$\sqrt{(R_{\mathrm{S}} - R_{\mathrm{V}})^2 - \left(\frac{EF}{2}\right)^2} - \sqrt{(R_{\mathrm{S}} - R_{\mathrm{V}})^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2}.$$

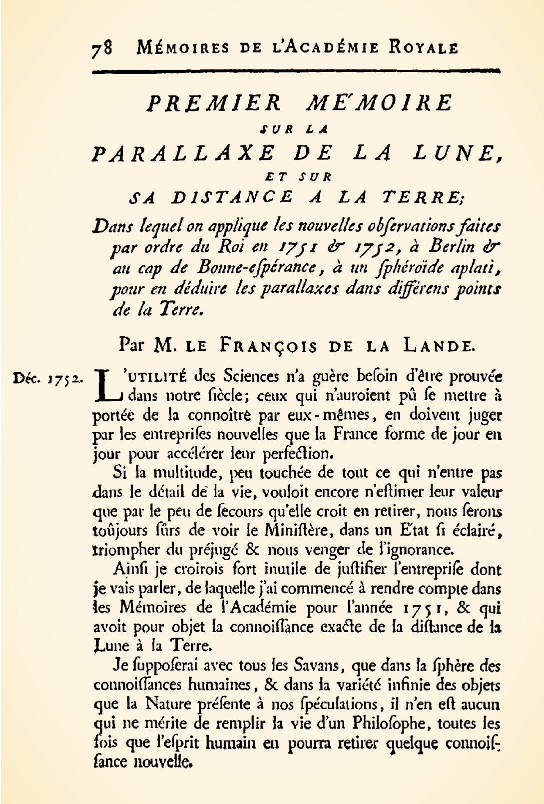
Dále platí $EF = \omega_{\mathrm{VS}} \cdot t_{\mathrm{EF}}$ a obdobně $CD = \omega_{\mathrm{VS}} \cdot t_{\mathrm{CD}}$. Dosazením obdržíme $\measuredangle bBa = 0{,}859' = 51''$. Sluneční paralaxa je rovna $p_{\mathrm{S}} = \measuredangle bBa \frac{a_{\mathrm{ZV}}}{a_{\mathrm{VS}}} \frac{R_{\mathrm{Z}}}{AB} = \measuredangle bBa \frac{2{,}8}{7{,}2} \frac{R_{\mathrm{Z}}}{AB} = 9{,}7''$. V rámci přiblížení vhodného pro výpočet na středoškolské úrovni jsme zanedbávali řadu faktorů, např. předpokládáme kruhové dráhy Země a Venuše, neprovádíme průmět vzdálenosti AB do rovnoběžného směru s pohybem Venuše, nekorigujeme vliv kapkovitého jevu Venuše vyvolaný existencí atmosféry Venuše na stanovení časů vnitřních dotyků, neuvažujeme odlišnou obvodovou rychlost rotace Země v místech pozorování atd. Původní historické výpočty po provedených korekcích [11] vedly k hodnotám přesnějším ležícím v intervalu 8,5″ až 8,9″.

Stanovení paralaxy Měsíce – upřesnění jeho vzdálenosti

Pomocí dalekohledů vybavených záměrnými kříži provedli v roce 1752 francouzští astronomové Joseph Je-



Obr. 8 Záznamy přechodů Venuše přes sluneční disk v letech 1761 a 1769.


78 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

PREMIER MÉMOIRE
SUR LA
PARALLAXE DE LA LUNE,
ET SUR
SA DISTANCE À LA TERRE;

Dans lequel on applique les nouvelles obſervations faites par ordre du Roi en 1751 & 1752, à Berlin & au cap de Bonne-eſpérance, à un ſphéroïde aplati, pour en déduire les parallaxes dans différens points de la Terre.

Par M. LE FRANÇOIS DE LA LANDE.

Déc. 1752. L'UTILITÉ des Sciences n'a guère beſoin d'être prouvée dans notre ſiècle; ceux qui n'auroient pû ſe mettre à portée de la connoître par eux-mêmes, en doivent juger par les entrepriſes nouvelles que la France forme de jour en jour pour accélérer leur perfection.

Si la multitude, peu touchée de tout ce qui n'entre pas dans le détail de la vie, vouloit encore n'eſtimer leur valeur que par le peu de ſecours qu'elle croit en retirer, nous ſerons toûjours ſûrs de voir le Miniſtère, dans un État ſi éclairé, triompher du préjugé & nous venger de l'ignorance.

Ainſi je croirois fort inutile de juſtifier l'entrepriſe dont je vais parler, de laquelle j'ai commencé à rendre compte dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1751, & qui avoit pour objet la connoiſſance exacte de la diſtance de la Lune à la Terre.

Je ſuppoſerai avec tous les Savans, que dans la ſphère des connoiſſances humaines, & dans la variété infinie des objets que la Nature préſente à nos ſpéculations, il n'en eſt aucun qui ne mérite de remplir la vie d'un Philoſophe, toutes les fois que l'eſprit humain en pourra retirer quelque connoiſſance nouvelle.

Obr. 9 Titulní list Lalandovy práce o stanovení paralaxy Měsíce.

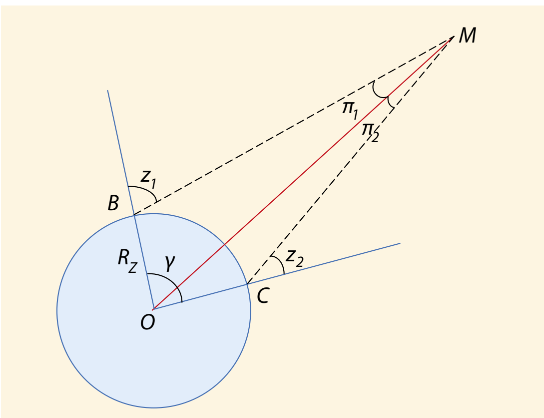
rome Lefrancois Lalande (1732–1807) v Berlíně (bod *B* o severní zeměpisné šířce 52°30′) a Nicolas Louise Lacaille (1713–1762) v Kapském Městě (bod *C* o jižní zeměpisné šířce 33°55′) měření zenitových vzdáleností Měsíce s hodnotami $z_1 =$ 32°32′ a z_2 =55°14′ ke stanovení paralaxy Měsíce. Titulní list Lalandovy práce [14] viz obr. 9.

Úloha

Při znalosti poloměru Země a jejím předpokládaném sférickém tvaru určete vzdálenost Měsíce. Rozdílnost zeměpisných délek obou míst zanedbáváme, činí pouze 5°. Obr. 10 zachycuje situaci v rovině.

Řešení

Podle [15] v čtyřúhelníku *OCMB* nalezneme velikost úhlopříčky *OM*, tj. vzdálenosti Země – Měsíc. Platí $\pi_1+\pi_2+(180°-z_1)+(180°-z_2)+\gamma=360°$ (součet vnitřních úhlů v čtyřúhelníku), odtud $\pi_1+\pi_2=z_1+z_2-\gamma$. Dále platí



Obr. 10 Schéma měření paralaxy Měsíce.

$$\frac{OM}{R_Z}=\frac{\sin z_1}{\sin\pi_1} \text{ a } \frac{OM}{R_Z}=\frac{\sin z_2}{\sin\pi_2}\Rightarrow\frac{\sin z_1}{\sin\pi_1}=\frac{\sin z_2}{\sin\pi_2}.$$

Následné matematické úpravy vedou ke vztahům

$$\frac{\sin\pi_1+\sin\pi_2}{\sin\pi_1-\sin\pi_2}=\frac{\sin z_1+\sin z_2}{\sin z_1-\sin z_2},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi_1+\pi_2)\cos\frac{1}{2}(\pi_1-\pi_2)}{\cos\frac{1}{2}(\pi_1+\pi_2)\sin\frac{1}{2}(\pi_1-\pi_2)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(z_1+z_2)\cos\frac{1}{2}(z_1-z_2)}{\cos\frac{1}{2}(z_1+z_2)\sin\frac{1}{2}(z_1-z_2)}.$$

Nakonec obdržíme

$$\frac{tg\frac{1}{2}(\pi_1+\pi_2)}{tg\frac{1}{2}(\pi_1-\pi_2)}=\frac{tg\frac{1}{2}(z_1+z_2)}{tg\frac{1}{2}(z_1-z_2)}.$$

Poněvadž známe $\pi_1+\pi_2$, lze z posledního vztahu určit $\pi_1-\pi_2$ a jednotlivě i π_1 a π_2. Vzdálenost *OM* Země – Měsíc pak určíme ze vztahu

$$\frac{OM}{R_Z}=\frac{\sin z_1}{\sin\pi_1}, \text{ resp. } \frac{OM}{R_Z}=\frac{\sin z_2}{\sin\pi_2}.$$

(z_1 a z_2 jsou měřené hodnoty). Denní paralaxy hvězd jsou velmi malé, a proto je zanedbáváme.

Pro hodnoty odpovídající měření z roku 1752 platí $\gamma=52°30'+33°55'=86°25'$, $\pi_1+\pi_2=87°46'-86°25'=1°21'$.

Dále provedeme formální úpravu

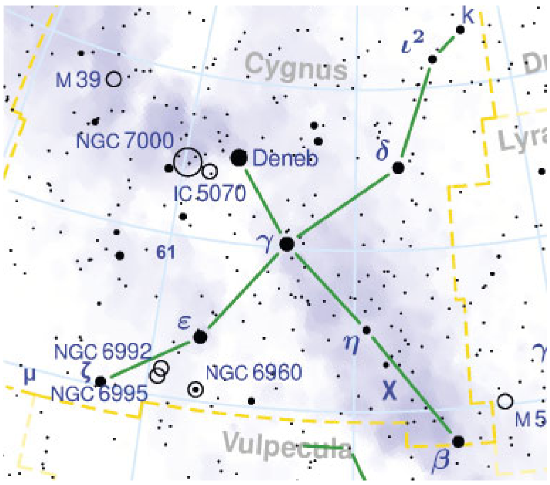
$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\pi_2-\pi_1)=\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\pi_2+\pi_1)\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}(z_2-z_1)\ \mathrm{cotg}\frac{1}{2}(z_2+z_1).$$

Dosazením a řešením obdržíme $\pi_1=32'$, $\frac{OM}{R_Z}=\frac{\sin z_1}{\sin\pi_1}=\frac{0,5378}{0,0093}=58$.

První nalezení vzdálenosti hvězd

Úloha

Německý astronom Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) stanovil v roce 1838 na základě třinácti pozorování roční paralaxu hvězdy 61 Cygni A jako $\pi = (0{,}31\pm 0{,}02)''$ [16]. Obr. 11 zachycuje polohu hvězdy 61 Cygni A v souhvězdí Labutě na obloze. V jakém rozmezí tehdy předpokládal, že leží reálná hodnota její vzdálenosti?



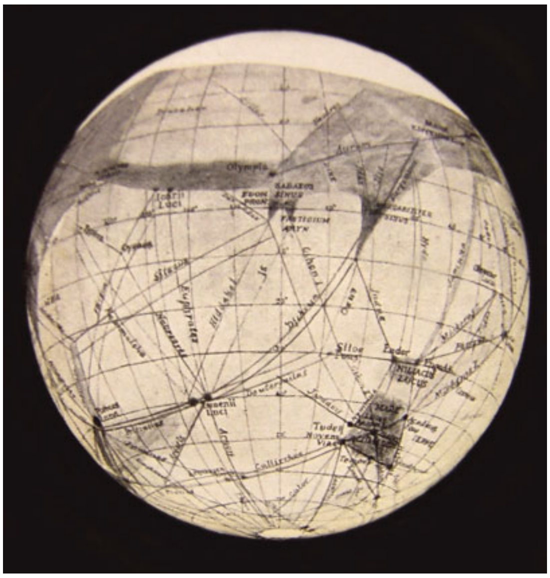
Obr. 11 Poloha hvězdy 61 Cygni na obloze.

Řešení

Původně zjištěná paralaxa ležela v rozpětí 0,29″ až 0,33″. Platí vztah $r=\frac{1}{\pi}$, tedy vzdálenost hvězdy podle Besselových pozorování byla v rozmezí (3,03 až 3,45) pc. Připomínáme, že současná hodnota paralaxy 61 Cygni

» Německý astronom Bessel stanovil roční paralaxu hvězdy 61 Cygni A. «

» Mohl Lowell pozorovat skutečné kanály na Marsu? «



Obr. 12 Obrázek pozorovaných „kanálů" na Marsu.

A z katalogu Hipparcos [17] činí $\pi = (0,287 \pm 0,002)''$, předpokládaná vzdálenost hvězdy je v intervalu (3,460 až 3,509) pc.

V současnosti lze díky družici HIPPARCOS určovat trigonometrickou metodou vzdálenosti hvězd do 100 pc s chybou přibližně 10 %, u plánované družice GAIA do vzdálenosti 10 000 pc s chybou zhruba 20 %.

Jak určíme hmotnosti hvězd?

Bessel (viz [18]) zjistil změny vlastního pohybu Síria A a v roce 1844 vyslovil myšlenku, že tento pohyb je vyvolán přítomností další hvězdy – systém je fyzickou dvojhvězdou. Podle současných údajů je paralaxa Síria A $\pi'' = 0,379''$, úhlová velikost velké poloosy $a'' = 7,62''$, oběžná doba T = 50,09 roku. Zjednodušeně předpokládejme, že dráhová rovina je kolmá k zornému paprsku.

Úloha

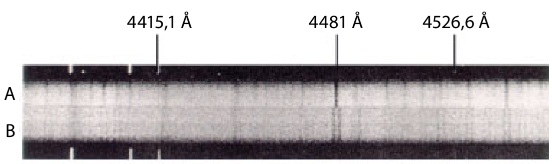
Nalezněte součet hmotností obou složek dvojhvězdy. Při znalosti poměru vzdáleností složek A a B k hmotnému středu soustavy $\frac{a_1}{a_2} = 0,47$ stanovte hmotnosti jednotlivých složek.

Řešení

Nejprve určíme velikost velké poloosy $a = \frac{a''}{\pi''}$. Součet hmotností složek stanovíme z upraveného třetího Keplerova zákona $\frac{a^3}{T^2} = M_1 + M_2$, kde a je vyjádřeno v AU, T v rocích a M v jednotkách M_S. Po dosazení obdržíme $3,2\,M_S$. Dále využijeme vztah $a_1 M_1 = a_2 M_2$, odkud nalezneme přibližně $M_1 = 2,2\,M_S$, $M_2 = 1\,M_S$.

Existují umělé kanály na Marsu?

V druhé polovině předminulého století italský astronom Giovanni Schiaparelli (1835–1910) a americký astronom Percival Lowell (1855–1916) přesvědčovali nejen astronomickou veřejnost o existenci tzv. kanálů na povrchu Marsu, viz obr. 12.



Obr. 13 Spektrum Mizaru.

Úloha

Mohl posledně zmiňovaný Lowell pozorovat skutečné kanály na Marsu, jestliže rozlišovací schopnost jeho dalekohledu dosahovala přibližně 1″?

Řešení

Vyjdeme z dráhových elementů Země a Marsu, ze znalosti poloměrů a excentricit drah planet. Největší přiblížení Marsu k Zemi nastává v situaci, kde Země se nachází v aféliu $a_Z(1+e_Z) = 1,017$ AU a Mars v perihéliu $a_M(1-e_M) = 1,382$ AU své dráhy. Jejich nejmenší vzdálenost tak činí 0,365 AU. Při této vzdálenosti a průměru Marsu 6 794 km je úhel pro pozorování planety roven $\alpha = \frac{206265 \cdot 6794}{0,365 \cdot 1,496.10^8} = 25,7''$. Lowellovy kanály se vyznačovaly úhlovou velikostí 1″, tedy $\frac{1}{25,7}$ disku Marsu. Aby byly pozorovatelné, musely by mít šířku 264 km, což neodpovídá velikostem umělých kanálů vybudovaných na Zemi. Existence kanálů je výsledkem optických klamů.[4]

Jaká je rychlost pohybu hvězd v dvojhvězdném systému?

Americký astrofyzik Edward Charles Pickering (1846–1919) zjistil koncem osmdesátých let předminulého století ve spektru Mizaru zdvojení některých úzkých spektrálních čar, např. čáry K Ca II s laboratorní vlnovou délkou $\lambda = 393,4$ nm, respektive čáry Mg II o laboratorní vlnové délce $\lambda = 448,1$ nm (obr. 13).[5]

Pickering vyslovil myšlenku, že jev je vyvolán pohybem dvou hvězd a Mizar je spektroskopickou dvojhvězdou. U posledně zmiňované čáry Mg II $\lambda = 448,1$ nm naměřil posuv $\Delta\lambda = 0,2$ nm. Byl jeho předběžný odhad z článku [19] o rychlosti složek přesahujících řádově 100 km s^{-1} správný?

Úloha

V přiloženém spektru B na obr. 13 jsou čáry posunuty přibližně stejně vlevo i vpravo od polohy jednoduché čáry ve spektru A. Jaký závěr můžeme z uvedeného učinit?

Řešení

Dosazením do vztahu $v = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ nalezneme $v = 135$ km s^{-1}. Obě hvězdy mají přibližně stejné hmotnosti.

Dokážeme objasnit tajemný posun čar ve spektru bílého trpaslíka?

Další americký astrofyzik Walter Sydney Adams (1876–1965) se systematicky zabýval studiem spektra bílého trpaslíka Síria B. V roce 1915 popsal v [20] jeho vzhled a prokázal, že jde o bílého trpaslíka. O deset let později roku 1925 v [21] vyložil posuv spektrálních čar vyvolaný gravitačním rudým posuvem. Použil čáru H_β s laboratorní vlnovou délkou $\lambda_1 = 486,1$ nm a H_γ s $\lambda_2 = 434,0$ nm. Pomocí komparátoru nalezl střední hodnotu posuvu pro obě čáry $\Delta\lambda = 0,032$ nm.

4 Rozlišovací schopnost dalekohledů je závislá na stavu zemské atmosféry. Velké pozemské dalekohledy v současnosti vybavené adaptivní optikou, korigující negativní vlivy atmosféry, a aktivní optikou, udržující ideální tvar ploch zrcadla, mají řádově stejnou rozlišovací schopnost jako HST přibližně v setinách arcsec.

5 V současné době astrofyzikové určují radiální rychlosti hvězd velmi přesně, jejich změny kolem středních hodnot s chybou v jednotkách metrů za sekundu, což umožňuje prokazovat kolem nich obíhající exoplanety.

Úloha

Určete výpočtem střední rychlost odpovídající gravitačnímu rudému posuvu.

Řešení

Velikost gravitačního rudého posuvu vyjádřil Adams pomocí tzv. kinematického ekvivalentu – rychlosti $v = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 21\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, kde $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$. Získaný výsledek byl nepřesný, z hodnot zlomku $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ naměřeného v současnosti činí vypočítaná velikost rychlosti přibližně čtyřnásobek, 89 $\mathrm{km\,s^{-1}}$. Adams ve své době neznal přesné hodnoty charakteristik Síria B. Pochopitelně velikost posuvu $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2R}$ je dána vztahem vyplývajícím z obecné teorie relativity.

Literatura

[1] Yong Li, Xiao-Chun Sun: „Gnómon shadow lengths recorded in the Zhoubi Suanjing: the earliest meridian observations in China?“, Research in Astron. and Astroph. **9**, 1377–1386 (2009).

[2] A. Ditrich: „Čínská určení slunovratu“, Čas. pro pěstování matematiky a fysiky **61**, 17–25 (1932).

[3] J. Kepler: *Astronomia Nova*. Heidelberg 1609.

[4] E. J. Aiton: „Kepler´s second law of planetary motion“, Isis **60**, 75–90 (1969).

[5] A. Šolcová: *Johannes Kepler*. Prometheus, Praha 2004.

[6] The JJMO Mars Paralax Project. Dostupné na WWW: <www.mccarthyobservatory.org/pdfs/pm020102.pdf>.

[7] G. D. Cassini: „Astronomie“, Mém. de l´Acad. Roy. des Sciences. Tome I, 168–174 (1673).

[8] G. D. Cassini: „Les Elemens de l´Astronomie verifiés par le rapport des Tables aux Observations de M. Richer, faites en l´Isle de Cayenne“, Mém. de l´Acad. Roy. des Sciences. Tome VIII , 55–117 (1730).

[9] E. Halley: „Astronomie Cometicae Synopsis“, Phil. Trans. Roy. Soc. London **24**, 1882–1899 (1705).

[10] E. Halley: „A New Metod of Determining the Paralax of the Sun, or his Distance from the Earth“, Phil. Trans. Roy. Soc. London **29**, 454–459 (1716).

[11] T. Hornsby: „The quantity of the Sun´s Paralax, as deduced from the Observations of the Transit of Venus, on June 3, 1769“, Phil. Trans. Roy. Soc. London **61**, 574–579 (1771).

[12] <www.movatable-type.co.uk/scripts/latlong.html >

[13] H. Blatter: *Venustransit 2004*. Institute of Atmospheric and Climate Science, Swiss Federal Institute of Technology, Zürich 2003. Dostupné na WWW: <http://eclipse.astroinfo.org/transit/Venus/project2004/pub/Blatter.etal.eng.200306.pdf>.

[14] J. J. Lalande: „Premier mémoire sur la parallaxe de la lune et sur sa distanca a la terre“, Mém. de l´Acad. Roy. des Science, 78–89 (1752).

[15] B. Hacar: *Úvod od obecné astronomie*. SPN, Praha 1963.

[16] F. W. Bessel: „On the paralax of 61 Cygni. A letter from Professor Bessel to Sir J. Herschel“, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **4**, 152–161 (1838).

[17] The Hipparcos and Tycho Catalogues, ESA SP-1200. Dostupné na WWW: <www.rssd.esa.int/>.

[18] F. W. Bessel: „On the variations of the proper motions of Procyon and Sirius“, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **6**, 136–141 (1844).

[19] E. C. Pickering: „On the spectrum of Zeta Ursae Majoris“, Am. J. Sci. **39**, 46–47 (1890).

[20] W. S. Adams: „The spectrum of the companion of Sirius“, Pub. Astron. Soc. Pacific. **27,** 236–237 (1915).

[21] W. S. Adams: „The relativity displacement of the spectral lines in the companion of Sirius“, Proc. Nat. Acad. Sci. **11**, 382–387 (1925).