Zákony pohybu planet od Keplera po Newtona

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta Masarykova Univerzita, Kotlářská 2, 611 37 Brno; stefl@physics.muni.cz

Článkem si připomeneme 450. výroční narození Johanna Keplera – 27. 12. 1571. Jeho proslulé Rudolfínské tabulky byly v první polovině 17. století široce uznávány a používány. Keplerovy zákony, s jejichž pomocí tabulky vznikly, však učeneckou komunitou jednomyslně přijaty nebyly. I po jejich uveřejnění se objevovaly pokusy o odlišný výklad pohybu planet; nejvýraznější postavou v tomto ohledu byl Boulliau. Definitivní uznání platnosti Keplerových zákonů nastalo až po vydání Newtonových Principií.

Úvod

Počátkem 17. století zkoumal Kepler zákonitosti pohybu Marsu. Hledal matematické vyjádření křivky dráhy, jakož i vztah mezi jeho rychlostí a vzdáleností od Slunce. Ke geometrickému popisu jeho pohybu zavedl plošnou rychlost a zjistil její neměnnost. Studoval závislost rychlosti planety na vzdálenosti od Slunce a objevil, že čím je vzdálenější, tím se pohybuje pomaleji. K objasnění interakce mezi Sluncem a Marsem použil fyzikální magnetickou hypotézu. Ústřední těleso Sluneční soustavy umístil do ohniska eliptické dráhy[1]. Vytvořenou kinematickou teorii shrnul ve třech zákonech.

Finální formulaci prvních dvou zákonů provedl Kepler ve *Výňatcích z koperníkovské astronomie* [1] z let 1618–1621, které jsou považovány za jeho nejvlivnější spis. Přispěly k tomu nejen vytříbené formulace, ale i účelné didaktické zpracování obsahu, připomínající moderní učebnice. Text byl psán formou otázek a odpovědí mezi učitelem a studentem. Kepler ve spisu rozšířil platnost svých zákonů na všechny v jeho době známé planety, nejen pouze pro Mars, jak původně učinil v díle *Astronomia nova* (*Nová astronomie*) [2] r. 1609.

Třetí harmonický zákon Kepler vyjádřil slovně v *Harmonii světa* [3] z r. 1619. Objevená zákonitost zachycovala úměrnost druhých mocnin oběžných dob planet třetím mocninám jejich středních vzdáleností od Slunce.

Přijetí Keplerových zákonů

Po svém uveřejnění byly kinematické Keplerovy zákony přijímány nejednoznačně, až do doby, než Newton objasnil jejich hlubší dynamické pozadí. Důvodem byla především nedůvěra k přibližným matematickým metodám, o které se Kepler ve svých spisech opíral. Pochyby do značné míry vyplývaly z menší

Obr. 1 Ismaël Boulliau

matematické erudice čtenářů jeho spisů, než kterou disponoval sám autor. Další překážkou bylo využívání logaritmů ve výpočtech, například v *Rudolfínských tabulkách* [4] z r. 1627. V první polovině 17. století takové postupy nebyly běžné. Není náhodou, že ke stoupencům Keplera patřili matematici chápající výhody zjednodušení složitých výpočtů prostřednictvím logaritmu – *Henry Briggs* (1561–1630), objevitel dekadického logaritmu, nebo *Nikolaus Mercator* (1620–1687), jenž vytvořil první logaritmické tabulky goniometrických funkcí.

Postoje evropských osobností (z řad astronomů, matematiků, fyziků) k jednotlivým zákonům lze shrnout podle informací zpracovaných v článcích [5, 6, 7]. Au-

1 K pojmu dráha používanému v článku upřesňujeme, že v dobách Keplera a Newtona neexistovalo nynější rozlišování pojmů dráha a trajektorie. V souladu s tehdejší terminologií ponecháváme pojem dráha.

toři při zkoumání historických textů zjišťovali nejen pouhou existenci odkazů ve spisech, nýbrž i věcnou aplikaci zákonů při konstrukci dráhy či výpočtech tabulek planet.

Platnost **eliptického zákona**, popisujícího tvar dráhy, přijali např. *Pierre Gassendi* (1592–1655), *William Crabtree* (1610–1644), *Ismaël Boulliau* (1605–1694), *Jeremiah Horrocks* (1618–1641), *Vincent Wing* (1619–1668), *Thomas Streete* (1621–1689) či *Nikolaus Mercator.* Posledně jmenovaný zavedl r. 1664 polární tvar rovnice elipsy, dnes hodně používaný.

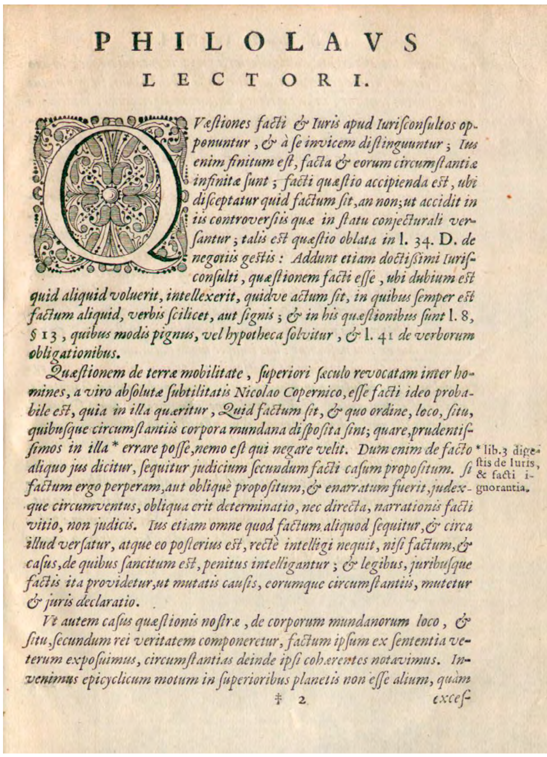
Složitější bylo přijetí **zákona ploch**, vystihujícího zákonitosti pohybu planety podél ekliptiky v čase. Připomeňme, že v *Nové astronomii* Kepler uvedl dvě jeho znění, jejich podrobnější rozbor nalezne čtenář v knize [8]. Věcně správnější byla formulace: *Rychlost planety se mění tak, že průvodič spojující planetu se Sluncem opisuje stejné plochy za stejné časy,* kterou autor posléze používal. Zákon ploch nebyl aplikovatelný přímým způsobem pro stanovení poloh planet na eliptické dráze. Jejich výpočet se prováděl prostřednictvím geometrického modelu, ve kterém se průvodič otáčel kolem ohniska. Praktické využívání zákona bylo po matematické stránce složité, vyžadovalo mimo jiné řešení vztahu mezi excentrickou a střední anomálií. Zřejmě i proto nebyl zmiňovaný zákon příliš citován. Jeho platnost zpochybňovali například *Ismaël Boulliau* a *Seth Ward* (1617–1689). Naopak k obhájcům patřil *Jeremiah Horrocks*, který zákon aplikoval při výpočtech tabulek poloh planet, aniž to explicitně zmínil (komentujeme posmrtně vydaný spis *Opera Posthuma* z r. 1673). Zákon ploch byl důležitou součástí přednášek *Nikolause Mercatora* v letech 1670–1676. Pro vyjádření pravé anomálie jako funkce času použil zákon ploch *Thomas Street* v *Karolínské astronomii* z roku 1661. Explicitní formulace zákona však v textu spisu uvedena nebyla.

Svým obsahem byl nejsrozumitelnější **harmonický zákon**, jehož správnost byla snadněji ověřitelná. K výpočtům pro praxi důležitých tabulek poloh planet a Měsíce se však nepoužíval. Z astronomického hlediska ovšem bylo použití zákona zásadní pro upřesnění představ o středních vzdálenostech planet od Slunce, o rozměrech ve Sluneční soustavě, což ukázal například *Horrocks.* Později také *Street* v *Karolínské astronomii* prostřednictvím harmonického zákona vypočítal vzdálenosti Merkuru, Venuše a Marsu.

Pro úplnost poznamenejme, že řada významných osobností Keplerovu teorii pohybu planet nijak nereflektovala, např. *Blaise Pascal* (1623–1662), *Francis Bacon* (1561–1626), *Galileo Galilei* (1564–1642) a *René Descartes* (1596–1650).

Jak jsme v článku ukázali, přijetí Keplerových zákonů bylo v 17. století nepřehledné a spletité. Proto se historikové fyziky a astronomie pokusili o zjednodušení problematiky vyčleněním dvou principiálních pohledů. Podle Cohena [9] Keplerovy zákony byly přehlíženy, většina jeho astronomických spisů nebyla čtena a studována. Naopak Russell [5] se domníval, že byly známy a přijaty některými z výraznějších Newtonových předchůdců. Vývoj názorů můžeme rozdělit do tří časových období: Do roku 1630, 1630–1660 a 1660–1687.

Do roku 1630 uznali Keplerovu teorii ze známějších osobností *Giovanni Magini* (1555–1617), *Thomas Harriot* (1560–1621), *Severin Longomontanus* (1562–1647), *David Fabricius* (1564–1617), *Willebrord Snell* (1580–1626), *Federico Cesi* (1585–1630), *Jacob Bartsch* (1600–1633).


PHILOLAVS

LECTORI.

Qvæſtiones facti & Iuris apud Iuriſconſultos opponuntur, & à ſe invicem diſtinguuntur; Ius enim finitum eſt, facta & eorum circumſtantiæ infinitæ ſunt; facti quæſtio accipienda eſt, ubi diſceptatur quid factum ſit, an non; ut accidit in iis controverſiis quæ in ſtatu conjecturali verſantur; talis eſt quæſtio oblata in l. 34. D. *de negotiis geſtis: Addunt etiam doctiſſimi Iuriſconſulti, quæſtionem facti eſſe, ubi dubium eſt quid aliquid voluerit, intellexerit, quidve actum ſit, in quibus ſemper eſt factum aliquid, verbis ſcilicet, aut ſignis; & in his quæſtionibus ſunt* l. 8, § 13, *quibus modis pignus, vel hypotheca ſolvitur, &* l. 41 *de verborum obligationibus.*

Quæſtionem de terræ mobilitate, ſuperiori ſæculo revocatam inter homines, a viro abſolutæ ſubtilitatis Nicolao Copernico, eſſe facti ideo probabile eſt, quia in illa quæritur, Quid factum ſit, & quo ordine, loco, ſitu, quibuſque circumſtantiis corpora mundana diſpoſita ſint; quare, prudentiſſimos in illa errare poſſe, nemo eſt qui negare velit. Dum enim de facto aliquo jus dicitur, ſequitur judicium ſecundum facti caſum propoſitum. Si factum ergo perperam, aut obliquè propoſitum, & enarratum fuerit, judexque circumventus, obliqua erit determinatio, nec directa, narrationis facti vitio, non judicis. Ius etiam omne quod factum aliquod ſequitur, & circa illud verſatur, atque eo poſterius eſt, rectè intelligi nequit, niſi factum, & caſus, de quibus ſancitum eſt, penitus intelligantur; & legibus, juribuſque factis ita providetur, ut mutatis cauſis, eorumque circumſtantiis, mutetur & juris declaratio.*

* lib.3 digeſtis de Iuris, & facti ignorantia.

Vt autem caſus quæſtionis noſtræ, de corporum mundanorum loco, & ſitu, ſecundum rei veritatem componeretur, factum ipſum ex ſententia veterum expoſuimus, circumſtantias deinde ipſi cohærentes notavimus. Invenimus epicyclicum motum in ſuperioribus planetis non eſſe alium, quàm

‡ 2 *exceſ-*

Obr. 2 Titulní list spisu Filolaos.

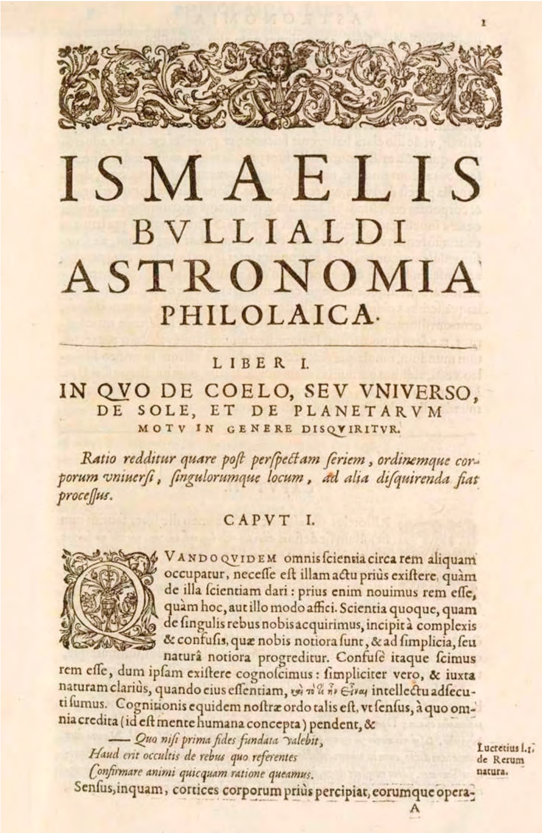
Kritériem pravdivosti Keplerových zákonů bylo naplnění předpovědí astronomických jevů podle nich propočítaných. V tomto smyslu důležitou kladnou roli sehrál přechod Merkuru přes sluneční disk 7. listopadu 1631, pozorovaný *Pierrem Gassendim* (1592–1655). *Rudolfínské tabulky* [4] jev předpověděly s mnohem menší časovou chybou než ostatní tabulky. Samotný tranzit umožnil korigovat dráhové elementy a pozorovanou úhlovou velikost Merkuru.

Giovanni Battista Riccioli (1598–1671) v *Novém Almagestu* r. 1651 přijal Keplerovu teorii, vyložil zákon ploch a harmonický zákon. Vyzdvihl správnost předpovědí poloh planet, zejména Marsu. Za pravděpodobnější však zvolil geocentrický systém, nikoliv heliocentrický. Později v *Reformované astronomii* r. 1665 při výpočtech tabulek poloh planet aplikoval Boulliauovu teorii.

Pohyb Měsíce kolem Země a Venuše kolem Slunce zachytil eliptickou dráhou *Jeremiah Horrocks.* Předpověděl přechod Venuše přes sluneční disk 4. prosince 1639, který pozoroval a stanovil při něm úhlovou velikost planety.

Ismaël Boulliau

Zvýšený zájem o Keplerovu teorii nastal zásluhou činnosti astronoma, fyzika, matematika a filozofa *Ismaëla Boulliaua,* viz obr. 1. Byl mnohostranně vzdělaným francouzským učencem, ovládajícím větší počet jazyků. Napsal několik astronomických spisů zabývajících se teorií pohybu planet. Nejprve to byl *Filolaos* [10], vydaný v protestanském Amsterodamu r. 1639 bez uvedení autora, viz titulní list na obr. 2. Období po Galileově procesu a jeho odsouzení r. 1633, kdy Svaté Officium zakázalo mimo jiné také názory vztahující se k pohybu Země, nebylo příznivě nakloněno astronomickému pokroku. A ten právě potvrzovaly nové


ISMAELIS
BVLLIALDI
ASTRONOMIA
PHILOLAICA.

LIBER I.

IN QVO DE COELO, SEV VNIVERSO, DE SOLE, ET DE PLANETARVM MOTV IN GENERE DISQVIRITVR.

Ratio redditur quare poſt perſpectam ſeriem, ordinemque corporum vniuerſi, ſingulorumque locum, ad alia diſquirenda fiat proceſſus.

CAPVT I.

QVANDOQVIDEM omnis ſcientia circa rem aliquam occupatur, neceſſe eſt illam actu priùs exiſtere, quàm de illa ſcientiam dari: prius enim nouimus rem eſſe, quàm hoc, aut illo modo affici. Scientia quoque, quam de ſingulis rebus nobis acquirimus, incipit à complexis & confuſis, quæ nobis notiora ſunt, & ad ſimplicia, ſeu naturâ notiora progreditur. Confuſè itaque ſcimus rem eſſe, dum ipſam exiſtere cognoſcimus: ſimpliciter vero, & iuxta naturam clariùs, quando eius eſſentiam, τὸ τί ἦν εἶναι intellectu adſecuti ſumus. Cognitionis equidem noſtræ ordo talis eſt, vt ſenſus, à quo omnia credita (id eſt mente humana concepta) pendent, &

— Quo niſi prima fides fundata valebit,
Haud erit occultis de rebus quo referentes
Confirmare animi quicquam ratione queamus.

Lucretius l. 1. de Rerum natura.

Senſus, inquam, cortices corporum priùs percipiat, eorumque opera-

A

Obr. 3 Titulní list první knihy první kapitoly Filolaovy astronomie

geometrické a optické argumenty uvedené ve *Filolaovi*. Následoval nejvýznamnější spis období mezi Keplerem a Newtonem – *Filolaova astronomie* [11] z r. 1645. Posledním astronomickým spisem Boulliaua byly *Systematické a jasné základy Filolaovy astronomie* [12] z r. 1657.

Vraťme se k dílu *Filolaova astronomie* (viz titulní list na obr. 3 a 6). Autor v něm vycházel z přesvědčení, že nebeské pohyby je nutné interpretovat geometricky. Přijal eliptický zákon, neboť geometrický tvar elipsy vystihoval přirozený pohyb planet. Odmítl Keplerovu fyzikální úvahu o magnetické interakci mezi planetami a Sluncem, představenou v *Nové astronomii* a dopracovanou ve *Výňatcích z koperníkovské astronomie*. Boulliau jejímu vyvrácení věnoval dvanáctou kapitolu první knihy *Filolaovy astronomie*. Zejména nesouhlasil s Keplerovým předpokladem existence působících proměnných magnetických sil, vyvozovaných z pomalého pohybu planet v odsluních a rychlého v přísluních. Metafyzicky Boulliau předpokládal, že vlastní pohyb planet má svoji příčinu v nich samotných a byl zaveden „Božím architektem". Principiálně neuznával zákon ploch.

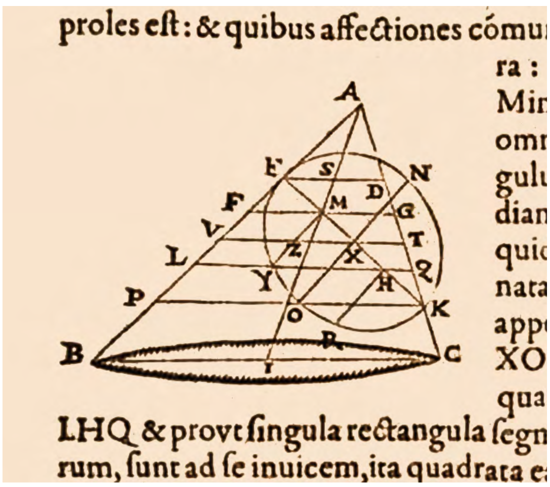
Samotného Keplera si však Boulliau vážil a v úvodní části *Filolaovy astronomie* [11] vyzdvihl jeho eliptický zákon takto: *„Poté, co jsem dlouho posuzoval Keplerův Komentář k Marsu* [*Astronomia Nova*] *… a jeho Epitome* [*Výňatky koperníkovské astronomie*] *a zjistil, že jeho eliptická hypotéza vystihuje pozorované nebeské pohyby přesněji než všechny ostatní, nepřestal jsem chválit a doporučovat její vhodnost a chytrost."* Neomezil se na pouhou slovní pochvalu, nýbrž v jedenácté knize provedl i empirické testování parametrů dráhy Marsu a Merkuru, přičemž ocenil přesnost tabulek poloh Marsu.

Především pak Boulliau vytvořil alternativní výklad pohybu planet, který si sám pochválil v první knize *Filolaovy astronomie* [11] slovy: *„… jediná, pravdivá a přirozená hypotéza planetárního pohybu, vyhovující první nerovnosti a vystavující všechny charakteristiky pohybu planet v jejich vlastních drahách…"*

Použil Keplerovu myšlenku, ověřovanou a posléze zamítnutou ve *Výňatcích koperníkovské astronomie*. Umístil do prázdného ohniska eliptické dráhy ekvant. Jde o bod, ze kterého se úhlový pohyb planet jeví rovnoměrný. Eliptickou dráhu se pokusil Boulliau odvodit z principu rovnoměrného kruhového pohybu. Vycházel z vlastních pozorovacích dat a jejich zpracování, s jejichž pomocí určoval polohy planet v daném čase se srovnatelnou úrovní přesnosti jako Kepler. Vytvořená hypotéza modelu s ekvantem umožňovala předpovídat polohy planet s přesností odpovídající pozorováním v intervalu $\pm 1'$.

Boulliau svůj model zobrazil geometricky pomocí šikmého kužele. Eliptickou dráhu planet obdržel jeho řezem. Velikost nerovnosti zachycovala excentricita ohniska vyjadřující rozdílnost mezi elipsou a kružnicí. Jedno ohnisko umístil na střed pohybu (do osy kužele), druhé do Slunce, vzhledem ke kterému byl pozorovaný pohyb poměřován. Planety se měly pohybovat po kružnici konstantní úhlovou rychlostí, kružnice měnily poloměr, vzaté dohromady vytvářely povrch kužele.

Model je popsán v první kapitole *Filolaovy astronomie*. Autor zavedl zmiňovaný šikmý kužel, obr. 4, s vrcholem A a kruhovou podstavou o průměru BC. Rovina řezu ABC procházela osou AI. Úsečka EK kolmá k AB určovala hlavní osu elipsy s body $ENKO$. Průsečíkem úseček EK a AI byl bod M, středem EK byl bod X. Boulliau dokázal, že bod M je ohniskem elipsy, jestliže $\sphericalangle IMK = \sphericalangle AIC$, nebo $\Delta\ MKR$ je rovnoramenný. V modelu předpokládal podmínku bisekce excentricity. Pohyb planety po elipse $EOKN$ zobrazovaly body na povrchu kužele (např. AB) při otáčení kolem osy AI, přičemž se jednalo o rovnoměrný úhlový pohyb po kružnici, opsané středové úhly byly stejné ve shodných časech, rovnoběžné s kružnicí obepínající podstavu BC. Planeta se přemísťovala po zmiňované elipse, nejmenší rychlostí v bodě E (odsluní) a největší v bodě K (přísluní). Zrychlovala při pohybu směrem ke K, zpomalovala směrem k E. Výsledkem byl pohyb rovnoměrnou úhlovou rychlostí kolem centrálního bodu, ale současně nerovnoměrný po elipse.



Obr. 4 Šikmý kužel podle Filolaovy astronomie.

Obr. 5 Robert Hooke

Do bodu *H* Boulliau umístil Slunce. Průchod bodem *E* umístěným na kružnici o poloměru *SE* byl pomalý, neboť kružnice byla nejmenší ze všech opisujících pohyb planety. V poloze *K* byla planeta nejblíže ke Slunci v *H*. Při pohybu od afélia *E* k perihéliu *K* planeta překračovala obvod početných kružnic, jejichž poloměr postupně narůstal. Popisovaný rovnoměrný pohyb kolem osy *AI* tak byl reprezentován obvodem elipsy *EOKN*. Změnu šířky planety řešil Boulliau stejně jako Kepler předpokladem stálého dráhového sklonu.

Souvislost geometrie a nerovnoměrnosti pohybu planety vyjádřil Boulliau v první knize *Filolaovy astronomie* [11]: „*… přihodilo se mi, že jsem pochopil, až byla práce téměř úplně celá, že střední pohyb kolem osy kužele je záležitostí velmi malé nerovnosti. Rovněž se mi stalo, že jsem rozložil část nerovnosti sestavené ve skutečnosti ze zpomalení a zrychlení, přesně podél sin střední anomálie, ale určité rozdíly nastávají od posunu planety z kružnice na elipsu.*“ Střední anomálie je úhel měřený u autora kolem ekvantu mezi přímkou apsid a polohou planety na kružnici.

Usuzoval, že Slunce – zdroj světla a tepla –, nemusí být nezbytně také zdrojem gravitační síly. Pokud navíc taková síla existuje, měla by se šířit nejen podél jedné roviny – ekliptiky –, ale sféricky v celém prostoru a její velikost by měla poklesávat se čtvercem vzdálenosti. Podle Yamamota [13] tak Boulliau rozšířil dvojrozměrné řešení na trojrozměrný prostor.

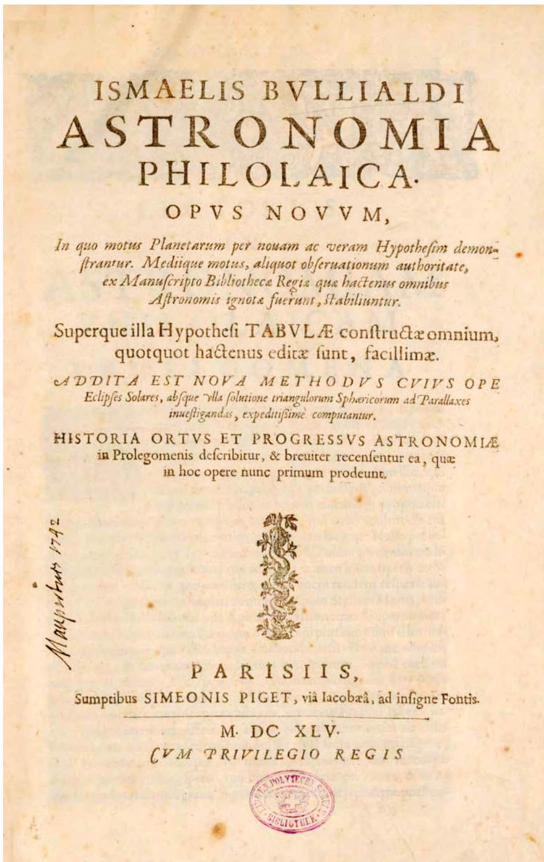
Ve svých úvahách o působení gravitace v závislosti na vzdálenosti Boulliau nenavazoval na Keplerovo astronomické dílo *Nová astronomie*, nýbrž na jeho *Optiku* [14]. Použil z ní analogii z fotometrie a ve dvanácté kapitole první knihy *Filolaovy astronomie* [11] uvedl: *„Jak pro sílu, kterou Slunce udržuje planety a která je tělesnou funkcí ve způsobu rukou, je vysílána v přímých paprscích skrz celý rozsáhlý svět, a jako species* [nehmotná forma vyzařovaná ze Slunce a přenášející jeho pohyb] *ze Slunce, rotuje s tělesem Slunce, … stává se slabší a zmírňuje se ve větší vzdálenosti… a poměr mohutnosti jejího poklesu je stejný jako v případě světla, totiž zdvojnásobený poměrem, ale převrácený vzdálenostem.*“

Připomínáme, že v *Optice* [14] v devátém tvrzení první kapitoly Kepler napsal: „*Poměr zachovávající se mezi dvěma sférickými povrchy, většího k menšímu, u kterých je zdroj světla v jejich středu, je stejný jako poměr mohutnosti, respektive hustoty světelných paprsků menšího ku většímu sférickému povrchu: to je obrácený.*“

Takto Kepler vyjádřil základní fotometrický zákon o *mohutnosti* [v dnešní terminologii *intenzitě*] světla, která je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti od zdroje.

Platný vztah pro ubývání velikosti gravitační síly se čtvercem vzdálenosti formuloval jako první Boulliau r. 1645. Jeho prioritu potvrdil Newton, který 20. června 1686 v dopise Halleymu [15] mimo jiné zmínil: „*Jak psal Borelli dlouho předtím, při tendenci planet směřovat ke Slunci v důsledku gravitace nebo magnetismu a pohybovat se po elipsách, tak jak psal Boulliau, přitom všechna síla týkající se Slunce jako jejich středu závisí na hmotě, musí být vzájemná, opakující poměr nepřímo úměrný čtverci vzdálenosti od středu…*“

V historii fyziky je uznávána role *Roberta Hooka* (1635–1703, viz obr. 5), při rozvoji teorie gravitace ve druhé polovině 17. století. Podstatně přispěl ke vzniku Newtonovy dráhové dynamiky. Ve svých přednáškách r. 1670 stanovil, že oběžný pohyb planety lze popsat její tangenciální a radiální rychlostí, viz Nauenbergův rozbor v [16]. Od Hooka rovněž pochází konkrétnější vyjádření myšlenky, že oběžný pohyb planet lze interpretovat pomocí kombinace setrvačného pohybu a gravitace Slunce. První krok v tomto směru již dříve naznačil *Giovanni Alfonso Borelli* (1608–1679) r. 1666 ve spisu *Úvahy nad Medicejskými satelity vyvozované z fyzikálních příčin.*


ISMAELIS BVLLIALDI
ASTRONOMIA
PHILOLAICA.
OPVS NOVVM,
In quo motus Planetarum per nouam ac veram Hypothesim demonstrantur. Mediique motus, aliquot obseruationum authoritate, ex Manuscripto Bibliothecæ Regiæ quæ hactenus omnibus Astronomis ignotæ fuerunt, stabiliuntur.
Superque illa Hypothesi TABVLÆ constructæ omnium, quotquot hactenus editæ sunt, facillimæ.
ADDITA EST NOVA METHODVS CVIVS OPE *Eclipses Solares, absque vlla solutione triangulorum Sphæricorum ad Parallaxes inuestigandas, expeditissimè computantur.*
HISTORIA ORTVS ET PROGRESSVS ASTRONOMIÆ in Prolegomenis describitur, & breuiter recensentur ea, quæ in hoc opere nunc primum prodeunt.
Maupertuis 1742
PARISIIS,
Sumptibus SIMEONIS PIGET, viâ Iacobæâ, ad insigne Fontis.
M. DC XLV.
CVM PRIVILEGIO REGIS

Obr. 6 Titulní list spisu Filolaova astronomie.

Obr. 7 Giovanni Domenico Cassini

Své představy o gravitaci shrnul Hooke ve svém *Systému světa* z r. 1660. Úvahu o ubývání velikosti gravitační síly se čtvercem vzdálenosti formuloval v dopise Newtonovi 6. ledna 1680 [15]. Jak vyplývá z dopisů Newtona Halleymu z června a července 1686 [15], považoval Newton Hooka za plagiátora myšlenky převzaté od Boulliaua, viz např. Wilsonovo vyjádření v [6]. Z časového hlediska francouzský astronom jednoznačně formuloval svoji myšlenku o závislosti gravitační síly na vzdálenosti zhruba o dvacet roků dříve než Hooke.

Druhá polovina 17. století až k Newtonovi

Historií poznání gravitace jsme se přenesli do třetího časového období, ani v něm nebylo přijetí Keplerových zákonů bezvýhradné. Pečlivý pozorovatel, italský astronom působící ve Francii *Giovanni Domenico Cassini* (1625–1712, viz obr. 7) nepřijal Keplerovu eliptickou dráhu. V roce 1680 studoval ovály, navrhl jejich použití při výkladu drah planet. V kartézské soustavě souřadnic je lze zapsat rovnicí $[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]=b^4$, kde a, b jsou reálná čísla. Ovál je symetrický kolem os x a y. Odlišnost oválu a elipsy ověřoval Sivardiere v [17] a dospěl k závěru, že rozdíl mezi nimi je stejný jako mezi elipsou a kružnicí.

Keplerovými zákony bylo završeno kinematické studium planetárních drah. Fyzika stála před dynamickým problémem – určení sil vyvolávajících pohyb planet po eliptických dráhách. Řešení přinesli již zmiňovaný *Robert Hooke* a především *Isaac Newton* (1643–1727, viz obr. 8).

Astronomii Newton studoval ze Streetovy *Karolínské astronomie* z r. 1661, v níž autor vycházel z eliptických drah planet a zákona ploch. Zkoumal, mimo jiné, přepočet střední anomálie na pravou anomálii, což byl problém řešený Keplerem v šedesáté kapitole *Nové astronomie*. Zákon ploch neumožňoval přímý výpočet, bylo nutné používat aproximace. Streetův postup byl opravou nedokonalé metody navržené Boulliauem ve *Filolaově astronomii* a poskytoval výsledky pouze málo odlišné od propočtů odvozených ze zákona ploch. Výpočet dával maximální chybu pro Mars 1′51″.

Newton se podrobně seznámil i s Boulliauovými spisy, ztotožnil se s jeho kritikou Keplerovy magnetické hypotézy interakce mezi Sluncem a planetami. V dopise *Jamesu Cromptonovi* (1648–1694) v dubnu 1681 [15] v souvislosti s názory Flamsteeda argumentoval, že Slunce je horké a nemůže být magnetem.

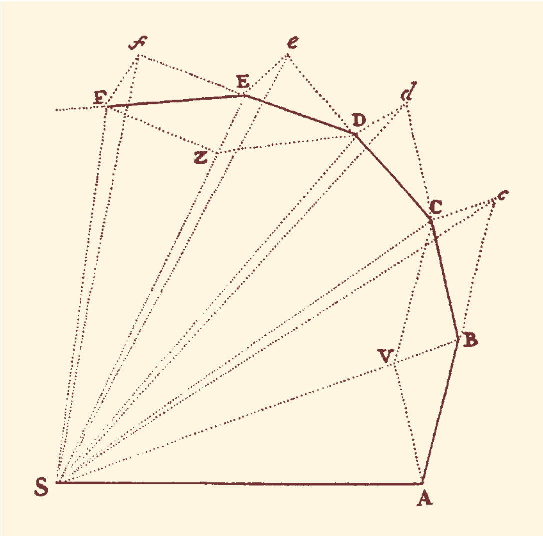
Později v pátém důsledku šestého tvrzení třetí knihy *Principií*[2] [18] Newton charakterizoval působení gravitační a magnetické síly slovy: „*Síla gravitace je rozdílné podstaty od síly magnetické, neboť magnetická přitažlivost není úměrná přitahované hmotě. Některá tělesa jsou přitahována více magnetem; jiná méně; většina těles vůbec ne. Magnetická síla jednoho a téhož tělesa může být zvětšena a zmenšena, a někdy je dokonce mnohem větší vzhledem k hmotě než síla gravitace; a při vzdalování od magnetu poklesává nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti, ale většinou s třetí mocninou vzdálenosti, pokud mohu posoudit z některých mých pozorování.*“

Keplerovy zákony v Principiích

Všeobecně známá je příhoda z r. 1684, kdy *Edmond Halley* (1656–1742) navštívil Newtona a tázal se ho, zda zná křivku dráhy v případě gravitační síly nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti. Ten okamžitě sdělil – elipsa. Na doplňující otázku o existenci doložitelného výpočtu tohoto výroku však odpověděl, že ho ztratil. Za několik měsíců téhož roku 1684 vyšel Newtonův krátký spisek *O pohybu obíhajících těles* [19], obsahující základní úvahy o eliptickém pohybu, které se mimo jiné opíraly o první dva Keplerovy zákony. Konkrétně v první větě *O pohybu* [19] Newton uve-

2 V rozboru textu *Principií* budeme vycházet z anglického překladu [18] Cohena a Whitmanové, který byl zpracován podle třetího vydání r. 1726 s přihlédnutím k Motteho prvnímu anglickému překladu z r. 1729. Třetí vydání představuje nejvyzrálejší Newtonovy myšlenky.

Obr. 8 Isaac Newton



Obr. 9 Geometrické zachycení oběžného pohybu mnohoúhelníkem při působení centrálních sil

dl: „*Všechna obíhající tělesa popisujeme průvodičem od středu, plochy jsou úměrné časům.*“ Autor převzal a prohloubil Keplerovu argumentaci z *Nové astronomie*. Dospěl ke stejnému závěru, přičemž vyšel z obecné úvahy existence centrálních sil mezi jejich zdrojem a tělesem, směřujících radiálním směrem k pevnému středu a od něj. K výkladu fyzikální reality použil geometrii, pohyb obíhajícího tělesa rozložil do malých časových úseků. Centrální silové působení měnilo směr a velikost pohybu, výsledkem byla lomená čára, viz obr. 9. Zákon ploch obdržel limitním přiblížením, zvětšením počtu trojúhelníků. Spojitou dráhu tělesa Newton aproximoval na sebe navazujícími úsečkami, které byly uraženy za stejné časové intervaly. V souladu se zákonem setrvačnosti předpokládal rovnoměrný přímočarý pohyb tělesa z *A* do *B*. Plocha $\Delta\ SAB$ byla stejná jako $\Delta\ SBc$, neboť oba trojúhelníky měly stejné základny i výšky. Jednotlivé body *A, B, C, D, E* a *F* mnohoúhelníku ležely na popsané křivce. Jelikož byl mnohoúhelník rovinným útvarem, pak také křivka ležela ve stejné rovině.

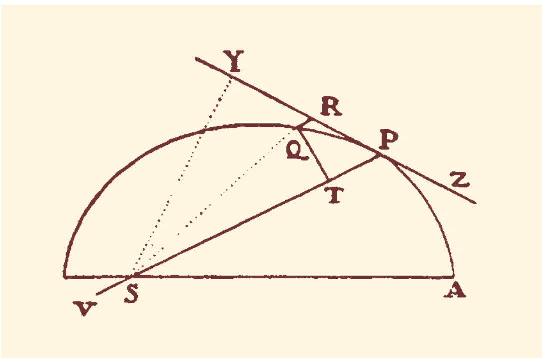
Výše uvedenou klíčovou první větu přenesl do *Principií* [18] jako první tvrzení první věty části druhé **O nalezení centrálních sil** první knihy takto: „*Plochy, které opisují tělesa průvodiči při pohybu po drahách kolem nehybného středu sil, leží ve stálé rovině a jsou úměrné časům.*“ Metodou mnohoúhelníkového přiblížení Newton dokázal, že Keplerův zákon ploch platil pro pole libovolné centrální síly. Vycházel z úvahy, že při oběžném pohybu ve zmiňovaném poli sil jsou v čase neměnné dva parametry – dráhová rovina a plošná rychlost –, což vedlo k objasnění fyzikálního pozadí zákona ploch.

V šestém tvrzení páté věty první knihy *Principií* [18] Newton sdělil: „*Jestliže těleso obíhající po dráze kolem nehybného středu v prostoru s prostředím bez odporu opisuje v průběhu minimálního času oblouk, z jehož středu vedeme výšku oblouku*[3]*, která dělí na poloviny tětivu oblouku a směřuje k nehybnému středu, potom centrální síla ve středu oblouku je úměrná výšce oblouku a nepřímo úměrná čtverci času.*“ Při důkazu tvrzení použil ilustraci reprodukovanou na obr. 10. Těleso *P* (Newton takto označoval rovněž i bod) obíhalo kolem středu *S*, opisovalo křivku *APQ*, které se dotýkala v bodě *P* tečna *ZPR*. Zavedl kolmici k průvodiči *SP* vyznačenou *QT*. Na těleso *P* působila síla směřující podél přímky *SP*, závisela pouze na vzdálenosti od *S*. Pohybující se těleso *P* by v její nepřítomnosti pokračovalo přímočarým pohybem z *P* do *R*. Tudíž v bodě *R* by se nacházelo tehdy, jestliže by na něj nepůsobila žádná síla. Z bodu *Q* blízkého k *P* vedl přímku *QR*//*SP*, která protínala tečnu v *R*. Čím více se v limitním přiblížení $P \rightarrow Q$, tím lépe byl předpoklad *QR*//*SP* naplňován. Vzdálenost obíhajícího tělesa od tečny ve směru k *S* v průběhu časového intervalu byla *QR*. Její velikostí poměřoval Newton velikost působící síly, odchylka *QR* byla úměrná síle směřující k *S* a čtverci času, nezbytnému k pohybu od *P* do *Q*. Čas byl úměrný ploše Δa (vymezené body *SQP*), kterou vyjádřil prostřednictvím základny *SP* a výšky *QT*. V prvním až pátém důsledku šestého tvrzení Newton postupně odvodil vztah pro centrální sílu, která byla nepřímo úměrná $(SP^2 x\, QT^2)/(QR)$, jestliže v limitní úvaze se bod *P* přiblížil ke *Q*. Pro sílu obdržel $F \sim (QR)/(SP^2 x\, QT^2)$, (síla ~ vzdálenost/čtverec času), tzv. **dynamický poměr**, zachycující vztah mezi centrální silou a vlastnostmi dráhy. Výpočet limitní hodnoty pro sílu provedený geometricky umožnil interpretovat pohyb v poli centrální síly působící na obíhající těleso.

Geometrický rozdíl mezi prvním a šestým tvrzením první knihy analyzoval Nauenberg v [20], popsal ho následovně: Prodloužení tětivy v prvním tvrzení nahradila v šestém tvrzení přímka tečny. Podle obr. 8 a 9 ve vrcholu *B* prodloužení *Bc* tětivy *AB* odpovídalo přímce tečny *ZPR*, *P* bylo ekvivalentní *B* a odchylka *Cc*// s *BS* odchylce *QR*//*SP*. V limitním přiblížení, když se délka tětivy blíží k nule, byl rozdíl mezi tětivou a přímkou tečny velmi malý, a tudíž obě geometrické konstrukce se staly obdobnými.

Newton v jedenáctém, dvanáctém a třináctém tvrzení první knihy přikročil k reálnému tvaru dráhy – postupně eliptickému, hyperbolickému a parabolickému. Řešil tzv. **přímý problém**, stanovení zákona síly při zadaném kuželosečkovém tvaru dráhy. S ohledem na astronomickou realitu pohybu planet po uzavřených eliptických drahách kolem Slunce vyložíme pouze prvně jmenovaný případ, rozebíraný např. Krylovem [21], Chandrasekharem [22] a Pourciaem [23]. Jedenácté tvrzení šesté věty třetí části **O pohybu těles po excentrických kuželosečkách** první knihy *Principií* [18] znělo: „*Těleso obíhá po elipse; je požadováno nalezení zákona centrální síly, směřující k ohnisku elipsy.*“

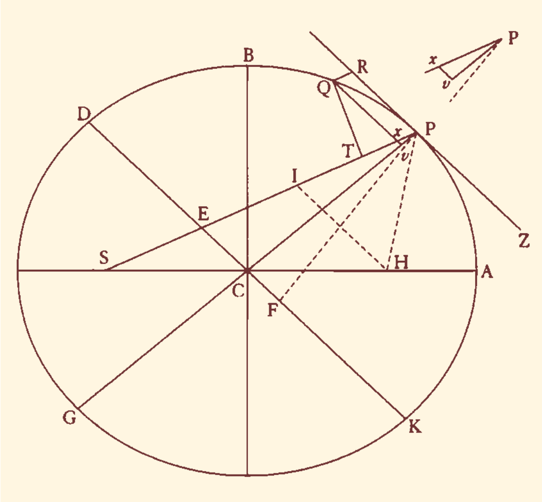
» Řešil tzv. přímý problém, stanovení zákona síly při zadaném kuželosečkovém tvaru dráhy. «



Obr. 10 Geometrický obrázek pro odvození závislosti centrální síly na vzdálenosti.

3 Původní pojem „*sagitta*“, použitý v *Principiích*, jsme interpretovali geometricky jako výšku oblouku křivky k tětivě. Newton ji však chápal také jako protaženou až k nehybnému středu.

» … odvodil, že se mění nepřímo úměrně se čtvercem vzdálenosti. «



Obr. 11 Geometrický obrázek pro vyjádření centrální síly při eliptickém pohybu.

V obr. 11 Newton označil *S, H* jako ohniska elipsy, *CA* velkou a *CB* malou poloosu elipsy, *ZPR* tečnu v *P*, *DCK* a *PCG* označovaly sdružené průměry, *KCD* // *ZPR*, *PF* byla normála k tečně *ZPR*, *RQ* // *PS*, *Qv* // *IH* a rovnoběžné s tečnou *ZPR*. Bod *v* ležel na *PC* a *x* na *PS*. Z definice elipsy vyplývalo *SP* + *PH* = 2*a*, dále zavedl *latus rectum* $L = (2b^2)/a = (2BC^2)/(CA)$, ∢ *IPR* = ∢ *HPZ*, odkud plyne ∢ *PIH* = ∢ *PHI* a platí *PI* // *PH*. Označil *SP* protínající průměr *DK* v bodě *E* a odvěsnu *Qv* v bodě *x* a rovnoběžník *QxPR*. Podle desátého tvrzení *Principií* $(Pv \text{ x } vG)/(Qv^2) = (CP^2)/(CD^2)$ a $PF^2 \text{ x } CD^2 = CB^2 \text{ x } CA^2$. Je zřejmé, že *EP* bylo rovno velké poloose elipsy *AC*, neboť *HI* // *EC*, *ES* = *EI*, neboť *CS* = *CH*. Platilo *PE* = ½(*PS* + *PI*), *HI* // *PR*, ∢ *IPR* = ∢ *HPZ*, kde z vlastností elipsy vyplývalo *PI* = *PH*, *PS* + *PH* = 2 *AC*. Newton obdržel $(L \text{ x } QR)/(L \text{ x } Pv) = (QR)/(PV)$ a *QR* = *Px*, z podobnosti *Δ Pxv* a *Δ PCE* odvodil $(Px)/(Pv) = (PE)/(PC)$, tedy $(QR)/(Pv) = (AC)/(PC)$, přičemž $(L \text{ x } Pv)/(Gv \text{ x } Pv) = L/(Gv)$ a $(Gv \text{ x } vP)/(Qv^2) = (CP^2)/(CD^2)$. Při limitním ztotožnění bodů Q a P je *Qx* = *Qv*, což vedlo k

$$\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{EP^2}{PF^2} = \frac{AC^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{CB^2},$$

a tedy

$$\frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{CB^2}.$$

Další postupné Newtonovy úpravy vedly k

$$\frac{L \text{ x } QR}{QT^2} = \frac{AC \text{ x } L \text{ x } PC^2 \text{ x } CD^2}{PC \text{ x } Gv \text{ x } CD^2 \text{ x } CB^2} =$$
$$= \frac{2CB^2 \text{ x } PC^2 \text{ x } CD^2}{PC \text{ x } Gv \text{ x } CD^2 \text{ x } CB^2} = \frac{2PC}{Gv}.$$

Poněvadž body Q a P byly shodné, platilo 2*PC* = *Gv* , proto $L \text{ x } QR = QT^2$. Vynásobením $(SP^2)/(QR)$ dospěl k $(SP^2 \text{ x } QT^2)/(QR) = L \text{ x } SP^2$. Centrální síla je nepřímo úměrná $L \text{ x } SP^2$, tedy čtverci vzdálenosti *SP*.[4]

4 V textu důkazu jsme používali nesystematické značení geometrických útvarů, přímek, úseček atd. podle *Principií* stejně jako původní Newtonův zápis matematických vztahů, který například v moderním provedení pro *latus rectum* by měl tvar $L = (2b^2)/a = [2(BC)^2]/CA$. Redakční úpravou byly výrazy ve zlomcích na řádcích, oproti původnímu Newtonovu originálu *Principií*, opatřeny závorkami. V souladu s dřívějšími překlady *Principií* do různých jazyků jsme zachovali symbol *x* napodobující originální podobu.

V jiném řešení Newton předpokládal existenci síly směřující ke středu elipsy tak, že pod jejím působením těleso *P* opisovalo elipsu. Byla úměrná *CP* – vzdálenosti tělesa od středu elipsy. Povedeme-li přímku *CE* rovnoběžně s tečnou *ZPR* elipsy a jestliže *CE* a *PS* se protínají v *E*, pak síla, pod jejímž působením těleso opisuje elipsu, směřuje k určitému bodu *S* a bude úměrná $(PE^3)/(SP^2)$. Když *S* bude ohniskem elipsy, pak *PE* je dáno, tudíž síla bude nepřímo úměrná SP^2. Newton v *Principiích* komentoval, že toto řešení lze rozšířit pro hyperbolu a parabolu, ale vzhledem k významu tohoto problému a jeho používání nebude obtížné potvrdit každý z těchto případů samostatným důkazem.

Shrneme Newtonův první matematický důkaz jedenáctého tvrzení, který se opíral o planimetrické úvahy, o geometrii elipsy a vyjádření různých poměrů. V něm nalezl souvislost mezi lichoběžníkem *QRPT* a parametry určujícími eliptickou dráhu prostřednictvím *latus rectum* $L = (2b^2)/a$, odvodil $(L \text{ x } QR)/(L \text{ x } Pv) = (QR)/(Pv)$. Umístil střed sil do ohniska elipsy, použil obecný vztah pro centrální sílu $F \sim (QR)/(SP^2 \text{ x } QT^2)$, který v případě elipsy při $(QR)/(QT^2) = konst.$ nabyl tvaru $F \sim 1/(SP^2)$.

U centrální síly směřující k ohnisku při pohybu po elipse odvodil, že se mění nepřímo úměrně se čtvercem vzdálenosti od něho. Jednou z takových sil je síla gravitační, tudíž zde Newton předznamenal formulaci gravitačního zákona – na tomto místě *Principií* ho však ještě obecně nezavedl.

Ve třech vybraných tvrzeních z *Principií* Newton řešil problém pohybu tělesa kolem středu působící centrální síly. Ukázal, že její existence je nezbytnou a dostatečnou podmínkou pro platnost zákona ploch. Aplikováno na astronomickou problematiku, kterou měl Newton nepochybně na mysli, při pohybu planet po eliptických drahách se musí síla směřující od Slunce také měnit nepřímo úměrně se čtvercem vzdálenosti.

V *Principiích* se Newton zabýval také **harmonickým zákonem**. Jeho původní znění v *Harmonii světa* bylo omezeno požadavkem malých numerických excentricit drah. Tuto podmínku Newton nepřijal a v *Principiích* použil, jak jsme ukázali, obecnější pohled. Dalším rozdílem bylo, že Newton v *Principiích* při výkladu harmonického zákona ztotožnil střední vzdálenost s velkou poloosou elipsy, zatímco Kepler v *Harmonii světa* použil střední vzdálenost určovanou pomocí přepočtu úhlů. V současné literatuře je harmonický zákon interpretován prostřednictvím velké poloosy.

Newton harmonický zákon původně zařadil v prvním vydání do *Hypotéz*, teprve v dalších vydáních mezi jevy. *Ve* ***čtvrtém jevu*** třetí knihy *Principií* [18] uvedl: *„Doby oběhů pěti hlavních planet a také Slunce kolem Země nebo Země kolem Slunce jsou v polokubickém vztahu k jejich středním vzdálenostem od Slunce.“*

Ke studiu vztahu obsaženého v harmonickém zákonu vytvořil Newton tabulkovou podobu hodnot oběžných dob a středních vzdáleností planet (viz tab. 1 a tab. 2). Porovnával střední vzdálenosti planet udávané Keplerem, Boulliauem a vypočítané z dob oběhů podle harmonického zákona. Ukázal, že údaje z pozorování se liší více od středních hodnot vzdáleností vypočítaných pomocí harmonického zákona z oběžných dob. Newton předpokládal, že vztah vyjadřující harmonický zákon platil s určitým stupněm přesnosti. Uvědomoval si existenci vzájemného gravitačního působení planet vyvolávajících poruchy, např. Saturnu a Jupiteru, které ve svých důsledcích komplikují matematické vyjádření vztahu.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10 759,275	4 332,514	686,978 5	365,256 5	224,617 6	87,969 2

Tab. 1 Doby oběhů planet a Země vzhledem ke hvězdám ve dnech a zlomcích dne.

	♄	♃	♂	♁	♀	☿
Podle Keplera	951 000	519 650	152 350	100 000	72 400	38 806
Podle Boulliaua	954 198	522 520	152 350	100 000	72 398	38 585
Podle dob oběhů	954 006	520 066	152 369	100 000	72 333	38 710

Tab. 2 Střední vzdálenosti planet a Země od Slunce.

» Až v Newtonových úvahách Keplerovy zákony nabyly na významu. «

Newton komentoval správnost údajů v tabulkách, připomněl, že vzdálenosti Merkuru a Venuše byly určovány spolehlivou metodou maximální elongace od Slunce, tudíž nebyl důvod o nich diskutovat. V případě vzdáleností vnějších planet rovněž neexistovaly pochybnosti, neboť se vycházelo ze zatmění měsíců Jupiteru a z nich stanovované polohy stínů vržených Jupiterem. Odtud byla odvozována heliocentrická délka Jupiteru, z jejíhož srovnání s geocentrickou délkou byla určena vzdálenost Jupiteru.

Následně v *Principiích* Newton provedl zobecnění harmonického zákona v osmém tvrzení třetí knihy a stanovil jeho obecný tvar. To mu umožnilo v druhém důsledku uvedeného tvrzení zjistit při znalosti parametrů drah Callista, Titanu a Měsíce relativní hmotnosti Jupiteru 1/1067, Saturnu 1/3021 a Země 1/169282 v jednotkách hmotnosti Slunce.

Závěr

V článku jsme podali přehled postupného uznání platnosti Keplerových zákonů až do vydání *Principií* včetně. Ve sledovaném období významně nenarůstal počet odkazů na Keplerovy spisy či praktické uplatnění jeho zákonů. Příčiny těchto okolností spočívaly v nepřijetí heliocentrického modelu Sluneční soustavy a v nedůvěře ke složitým matematickým postupům, především u zákona ploch. Pro něj navíc neexistovalo přímé praktické využití při výpočtech tabulek poloh planet.

Až v Newtonových úvahách Keplerovy zákony nabyly na významu. Jejich autora však v první knize *Principií* citoval málo, přestože na jeho teorii těsně navazoval a bylo mu dobře známo, že Kepler objasnil kinematiku pohybu planet. Newton rozvíjel vlastní koncepci výkladu pohybu (např. setrvačnosti pod vlivem Descarta). Snažil se odhalit fyzikální podstatu zákona ploch a dát ho do souvislosti se zákonem setrvačnosti a centrální silou. Proto se nejprve zabýval zákonem ploch obecně, aniž zpočátku zvolil konkrétní tvar dráhy.

K dynamickému vysvětlení sil vyvolávajících pohyb planet v *Principiích* použil Newton metody syntetické geometrie. Opíral se o Keplerovy zákony a Galileovy úvahy o pohybu střel. V článku jsme se zaměřili na přímý problém, určení centrálních sil vyvolávajících pohyb po eliptických drahách. Newton odvodil, že pokud se nějaké těleso pohybuje po eliptické dráze pod působením centrální síly směřující k jednomu z ohnisek elipsy, pak velikost síly se musí měnit nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti od ohniska. V astronomické aplikaci se jednalo o řešení pohybu planety kolem Slunce po uzavřené dráze při zanedbání gravitačního vlivu dalších těles.

Literatura

[1] J. Kepler: *Epitome astronomiae copernicanae.* Lentijs ad Danubium, excudebat Johannes Plancus, Lincii, Austriae 1618.

[2] J. Kepler: *Astronomia Nova.* Lentijs ad Danubium, excudebat Johannes Plancus, Heidelberg 1609.

[3] J. Kepler: *Harmonices mundi.* Lentijs ad Danubium, excudebat Johannes Plancus, Lincii, Austriae 1619.

[4] J. Kepler: *Tabulae Rudolphinae.* Jonae Saurii, Ulm 1627.

[5] J. L. Russell: Kepler´s law of planetary motion 1609–1666. *The British Journal for the History of Science* **2**, 1 (1964).

[6] C. Wilson: From Kepler´s Laws, So-called, to Universal Gravitation: Empirical Factors. *Archiv for History of Exact Sciences* **6,** 89 (1970).

[7] W. Applebaum: Keplerian astronomy after Kepler. Research and problems. *History of Science* **34,** 451 (1996).

[8] K. Petrovičová, D. Špelda, V. Štefl: *Nová astronomie.* Togga, Praha 2020.

[9] I. B. Cohen: Kepler´s Century: Prelude to Newton. *Vistas in Astronomy* **18**, 3 (1975).

[10] I. Boulliau: *Philolaus.* Blave, Amsterdami 1639.

[11] I. Boulliau: *Astronomia philolaica opus novum in quo motus planetarum per novam et veram hypothesin demonstratur.* Siméon Piget, Paris 1645.

[12] I. Boulliau: *Astronomiae philolaicae fundamenta clarius explicata et asserta.* Sebastianus Cramoisy, Paris 1657.

[13] Y. Yamamoto: *The Pull of History. Human Understanding of Magnetism and Gravity through the Ages.* World Scientific Publishing, Singapore 2018.

[14] J. Kepler: *Ad Vitelliomem pararalipomena, quibus astronomiae pars optica traditur appellari.* Frankfurt 1604.

[15] *The Correspondence of Isaac Newton.* Volume II, 1676–1687. H. W. Turnbull (ed.). University Press, Cambridge 1960.

[16] M. Nauenberg: *Robert Hooke´s Seminal Contribution to Orbital Dynamics.* The Royal Society of London, 2003.

[17] J. Sivardiere: Kepler ellipse or Cassini oval? *European Journal of Physics* **15,** 62 (1994).

[18] I. Newton: *The Principia – Mathematical Principles of Natural Philosophy.* University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London 1999. Anglický překlad I. B. Cohen, A. Whitman.

[19] I. Newton: *De motu corporum in gyrum.* London 1684.

[20] M. Nauenberg: Kepler´s area law in the *Principia*: filling in some details in Newton´s proof of Proposition 1. *Historia Mathematica* **30,** 441 (2003).

[21] I. Njuton: Matěmatičeskije načala naturalnoj filosofii. Ruský překlad A. N. Krylov. Nauka, Moskva 1989.

[22] S. Chandrasekhar: *Newton´s Principia for the Common Reader.* Claredon Press, Oxford 1995.

[23] B. Pourciau: Force, deflection, and time: Proposition VI of Newton´s *Principia*. *Historia Mathematica* **34**, 140 (2006).