

Keplerovy zákony v historii a v soudobých učebnicích

Vladimír Štefl

Masarykova Univerzita Brno, Přírodovědecká fakulta, Kotlářská 267/2, 611 37 Brno; stefl@physics.muni.cz

Článek komentuje a rozebírá původní podobu Keplerových zákonů podle *Nové astronomie* [1] a *Harmonie světa* [2] a porovnává ji s jejich formulací v soudobé gymnaziální učebnici [3] a vysokoškolských učebnicích úvodních kurzů fyziky [4, 5]. Záměrem článku je posoudit, zda obsahová rozdílnost historického textu a moderních učebnicových je věcně zásadní. V článku je dále shromážděn materiál pro historický přístup k výkladu Keplerových zákonů ve výuce fyziky.

V souvislosti s ní lze položit otázky: Proč je užitečné znát původní historický text? Co lze ze sledovaného srovnání ve výuce fyziky využít? V ní zařazená historie má při formování osobnosti studenta rozsáhlé a různorodé možnosti. Nejsou ve výuce, zejména na gymnáziích, zdaleka využity, neboť výrazná restrikce časové dotace hodin fyziky znemožňuje hlubší pohled na problematiku. V současnosti se poznatky z historie fyziky zpravidla omezují na fakta ze života historických osobností fyziky či na dílčí informace sdělení o jejich dílech. Pouze epizodicky jsou objasňovány historické vývoje idejí či způsob myšlení vědců. Velmi řídké jsou prováděny detailnější rozbory myšlenkových pochodů vědců fyziků při jejich objevech. Nežádoucím důsledkem této situace je vznik představ o bezproblémovém historickém vývoji fyziky. Idealizace hladkého průběhu procesu objevování a s ním spojených tvůrčích postupů je nepravdivá a ve svém dopadu matoucí.

Fyzikální objevy v historii byly ve skutečnosti téměř vždy doprovázeny tápáním a omyly. Všeobecně známou je Newtonova chybná úvaha při určování rychlosti zvuku ve vzduchu v knize druhé, větě čtyřicáté deváté *Principií* [6]. Střídavé tlakové změny při průchodu akustické vlny vzduchem považoval Isaac Newton (1643–1727) za izotermické děje a rychlost zvuku v dnešních jednotkách určil na $290 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ve skutečnosti změny probíhají v plynu rychle – adiabaticky –, takže nedochází k tepelnému vyrovnání. Odpovídající rychlost zvuku při adiabatickém ději a průměrné pokojové teplotě činí zhruba $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Hledání správného řešení lze v astronomii demonstrovat na nalezení prvních dvou zákonů ve spisu *Nová astronomie* německého astronoma Johannese Keplera (1571–1630). Autor byl vzorovým příkladem vědce, který velmi podrobně popisoval vlastní myšlenky. Ve zmiňovaném spisu zachytil věrně slepé uličky na cestě poznávání a jejich následná odhalení, rozpaky nad dalším postupem či posléze nové podněty při řešení. Kepler neskrýval před čtenářem obtížnost objevu a přesvědčivě ukázal, jak dlouze a těžce se rodily jeho zákony.



Johannes Kepler 1571–1630.

I přes velké osobní celoživotní překážky a peripetie (pronásledování z náboženských důvodů, úmrtí manželky a dětí, obvinění matky z čarodějnictví), Kepler vždy dokázal pokračovat po namáhavé cestě hledání zákonitostí pohybu planet. V relativně klidném období v první polovině svého pobytu v Praze po pětiletém intenzivním úsilí v letech 1601–1605 splnil vytyčený cíl. Vložil novou teorii pohybu Marsu, objasnil změny vzdálenosti planety od Slunce a určil dráhu, po které se pohybuje.

Ke zdárnému pátrání po skutečných drahách planet byla nezbytná astronomická pozorování. Kepler v Praze získal spolehlivé dvacetileté pozorovací údaje Tycho na Braheho (1546–1601). Dánský astronom podstatně

zvýšil přesnost určování poloh planet, z přibližně 10' svých předchůdců na 2' vlastních. Pouze při naplnění této podmínky bylo možné odlišit eliptickou dráhu od kruhové.

Pro své bádání pohybu planet si Kepler zvolil dobře pozorovatelný Mars, pohybující se nad obzorem ve větších výškách. Především si ho však vybral pro větší odlišnost jeho dráhy od kružnice, tudíž pro její relativně větší excentricitu. Tušil, že z uvedených důvodů pouze tato planeta poskytuje možnost proniknout do tajů pohybu planet. V pohybu Marsu astronomové rozlišovali dvě nerovnosti (odchylky od rovnoměrného pohybu – nerovnoměrnosti). První pravidelná změna oběžné a úhlové rychlosti s periodou odpovídající jeho siderické oběžné době 687 dnů, byla vyvolána, jak dnes víme, eliptickým tvarem dráhy planety. Druhá nerovnost vyjadřovala nestálost směru pohybu, zastavování či zpětné pohyby a byla způsobena rozdílnou oběžnou rychlostí planet a oběhu Země kolem Slunce.

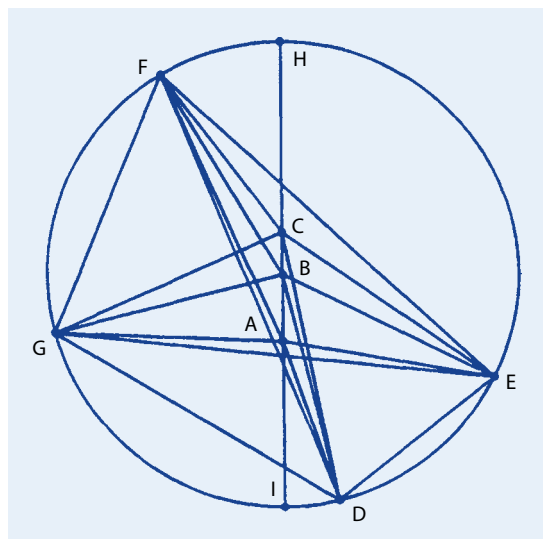
První nerovnost podrobně popsala řada pozorovatelů, mezi nimi například Tycho Brahe. Zjistil rychlejší pohyb Marsu v souhvězdí Kozoroha než na opačné straně zvěrokruhu – v souhvězdí Raka. Odhalil tak závislost rychlosti planety na její poloze podél ekliptiky. Výstižná interpretace uvedené nerovnosti byla klíčem k nalezení prvních dvou Keplerových zákonů.

Pouhé fitování pozorovacích údajů – poloh Marsu – nepostačovalo k objevu eliptické dráhy. Sám Kepler to odmítl a vyzdvihl úlohu hypotéz v *Nové astronomii*: „Celým tímto dílem jsem zamýšlel ověřit fyzikální hypotézu, jejímž výsledkem by byly vzdálenosti shodné s pozorováním, ale zároveň také platné rovnice...“ Připomínáme, že rovnicemi rozuměl vyrovnání, opravy rovnoměrného pohybu na nerovnoměrný a s nimi spojený přepočítání úhlů.

Zpracování pozorovacích údajů v Koperníkově heliocentrickém modelu Sluneční soustavy bylo oproti geocentrickému modelu pro Keplera obtížnější, neboť Země, ze které sledoval Mars, se pohybovala. Nejprve proto bylo nezbytné upřesnit její dráhu. Použil k tomu metodu využívající opozici Marsu a následně jeho pozorování za každou siderickou oběžnou dobu. Planeta byla vzhledem ke vzdáleným hvězdám na pozadí ve stejném místě. Mars tak byl pevným triangulačním bodem, *fiktivní lucernou*, jak ho nazval Einstein. Zemi však scházelo ve stejném čase k uskutečnění jejích dvou siderických oběhů ještě urazit oblouk o úhlu 43°. V popsané poloze Kepler proto pozoroval Mars ze Země pod jiným úhlem, na pozadí odlišných hvězd oblohy. Z obou uvedených směrů pozorování planety triangulací stanovil novou polohu Země. Za další a další siderické oběžné doby Marsu postupně našel následné polohy Země. Z množiny takto získaných bodů určil její dráhu. Zjistil, že dráha Země je téměř shodná s kružnicí, přičemž Slunce je posunuto mimo střed. Keplerovu výše uvedenou důvtipnou metodu při příležitosti 300letého výročí jeho smrti ocenil Albert Einstein (1879–1955) v [7], svůj obdiv k němu vyjádřil slovy: „Takto objevil Kepler skutečný tvar zemské dráhy, jakož i to, jak ji Země opisuje. My, později narození Evropané, Němci nebo dokonce Švábové, ho za to nemůžeme dost obdivovat a velebit.“

Matematické metody

Jak Kepler vyzdvihoval, metody odhalování nebeských jevů byly pro něho stejně tak podivuhodné, jako jevy



Obr. 1 Model vicarious hypothesis.

samotné. Inspirování jeho výrokem uvedeme ukázky jeho metod.

Ve svém studiu dráhy Marsu – hledání vhodné křivky – postupně zvolil modely kruhové, oválné a teprve v závěru dospěl k eliptickému modelu. Elipsa v jeho geometrických propočtech byla definována hlavní a vedlejší poloosou, respektive hlavní poloosou a excentricitou. Její pomocí Kepler zkoumal rozdíl mezi kruhovou a eliptickou dráhou. Myšlenkou bylo nahradit zkoumání vhodné polohy ekvantu v C hledáním vzdálenosti planety od Slunce v A. Na ukázku jeho trigonometrických úvah zvolíme analýzu kruhového Ptolemaiova modelu s využitím ekvantu, v tzv. modelu *vicarious hypothesis* – náhradní hypotézy, bez splnění podmínky *bisekce excentricity*. Podrobný popis Keplerova postupu byl publikován v [8], omezíme se pouze na vybrané ukázky.

Stanovení lineární excentricity Slunce od středu – BA – a excentricity ekvantu – BC – prověřoval Kepler prostřednictvím úhlů střední a pravé anomálie, mezi kterými hledal vztah. Výpočtem zjišťoval, zda body F, G, D, E (viz obr. 1) se nacházejí na kružnici a bod B leží mezi body A a C. Pokud zmíněná podmínka poloh bodů nebyla splněna, prověřoval hodnoty další. Únavnou a nudnou prací, iterační postupná přiblížení s využitím matematických rozkladů, Kepler opakoval 70krát, což komentoval v *Nové astronomii* takto: „Jestliže byla tato únavná metoda vyplněna s nechutí, mělo by to naplnit Tebe soucitem se mnou, neboť jsem některé výpočty provedl alespoň 70krát při vydání velkého množství času...“

Výsledkem výpočtů bez předpokladu *bisekce excentricity* byl návrh kruhové dráhy o poloměru 100 000 dílů, s lineární excentricitou Slunce BA 11 332 dílů a ekvantu BC 7 232 dílů, tedy s jejich poměrem $BC/BA \approx 0,64$. Pro tuto hodnotu poměru našel Kepler dobrý souhlas úhlových poloh Marsu, ale nikoliv vzdáleností planety od Slunce. V ověřování svých dalších úvah proto zvolil podmínku *bisekce excentricity* $BC/BA \approx 1$. Pro tento poměr obdržel numerickou excentricitu 0,09282, což je srovnatelné s její dnešní hodnotou 0,09337. Použití předpokladu *bisekce excentricity* poskytovalo lepší vzdálenosti, ale neodpovídalo dostatečně přesně polohám heliocentrických délek, především v oktantech. Rozdíl pozorovaných a propočítaných poloh Marsu činil zhruba 8'. Kepler si uvědomoval nezbytnost co nej-

většího souhlasu pozorovacích údajů a teorie. Velmi dobře chápal, že Tycho Brahe se tak velkých chyb při svých pozorováních nedopustil. Proto model *vicarious hypothesis* navrhl.

Následně Kepler přešel ke studiu závislosti oběžné rychlosti – *celeritas* – pohybu Marsu na vzdálenosti od Slunce. Jako první astronom zkoumal souvislost mezi hodnotami spojitých změn úhlových rychlostí planety při pohybu kolem Slunce a jejími vzdálenostmi od něho. Vycházel z úvahy, že doba strávená planetou na malém oblouku dráhy – *mora* – je úměrná její vzdálenosti od Slunce. Celkový čas pro delší oblouk poměřoval součtem všech vzdáleností obsažených v sektoru odpovídajícímu oblouku. Z dnešního pohledu se jednalo o integrační problém.

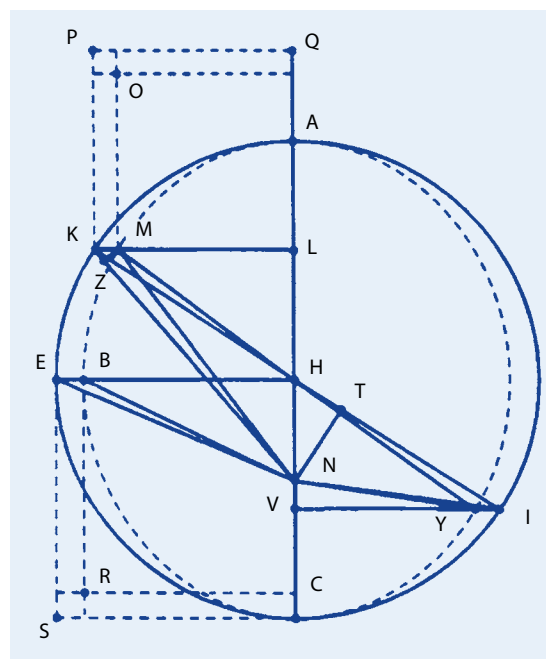
V *Nové astronomii* Kepler uvedl: „Protože jsem poznal, že existuje nekonečný počet bodů excentrické kružnice [dráhy] a nekonečný počet jejich vzdáleností [od Slunce], napadlo mne, že všechny tyto vzdálenosti jsou obsaženy v dráhové rovině. Vzpomněl jsem si, že takovým způsobem kdysi také Archimédés rozdělil plochu kruhu na nekonečný počet trojúhelníků, když hledal poměr obvodu kružnice k průměru.“

Kepler rozčlenil obvod kruhové dráhy na 360 stejných oblouků a v každém z nich stanovil vzdálenost od středu (poloha Slunce). Výpočet obsahu plochy kruhu provedl sečtením ploch rovnoramenných trojúhelníků se základnami na jeho obvodu a vrcholy ve středu (psal o ploše, měl na mysli podle soudobé terminologie obsah plochy). V kruhu si představil nekonečný počet radiálně vedených přímk zachycujících vzdálenosti od středu k obvodu. Čím větší byl počet spojených trojúhelníků, tím více takových přímk obsahovaly. Kepler provedl součet velikostí jednotlivých přímk – vzdáleností planety – pro malé úseky dráhy a nahradil je plochou, v níž by se jednotlivé vzdálenosti „srovnávaly“, matematicky však oba vztahy ekvivalentní nebyly.

Přestože výpočet nebyl zcela přesný, nahradil numerický součet vzdáleností celkovou plochu sektoru mezi vymezujícími průvodiči. V závěrečných kapitolách *Nové astronomie* Kepler přešel od kruhové dráhy k eliptické. Problém stanovení plochy sektoru elipsy vyřešil její záměnou za k ní přidruženou plochu kruhového sektoru. Zmiňované plochy vyjádřil prostřednictvím známých geometrických veličin, jak dále ukážeme.

Přechod k eliptické dráze byl detailně zachycen v článku [9], vybereme z něho pouze některé ukázky. Kepler stanovil elipsu (viz obr. 2) prostřednictvím redukce (lineární transformace) všech souřadnic pomocné excentrické kružnice v poměru velikostí malé a velké poloosy elipsy $b : a$, jestliže $HB = b$, $NB = a$. Elipsu vepsal do zmiňované kružnice tak, že z jejího obvodu spustil kolmice KL , EH na přímkou apsid AC , které protínaly v bodech M a B obvod elipsy. Zmiňovaný poměr v původním textu v *Nové astronomii* autor zapsal $BH : HE = ML : KL$. Dále odvodil poměr velikostí ploch elipsy ABC a kruhu AEC , který byl úměrný poměru velikostí kolmic z elipsy a z kružnice, tedy poměru malé a velké poloosy, platilo $ABC : AEC = BH : EH$. To Keplerovi umožnilo zaměnit plochy sektorů elipsy a kruhu. Výsledkem byl poměr obsahu ploch $ANM : AKN = ML : KL = b : a$, odpovídající poměru velikostí kolmic z elipsy a kružnice.

Propoměr obsahů ploch trojúhelníků Δ platí $MNL:KNL = b:a$. Odtud kombinováním již výše uvedených vzta-



Obr. 2 Keplerova eliptická dráha

hů obdržel pro plochu eliptického sektoru $ANM = b/a$ krát plocha kruhového sektoru ANK . Plochu eliptického sektoru definovanou polohou bodu M reprezentujícího Mars stanovil pomocí k ní přidružené plochy kruhového sektoru AKN , která byla rovna součtu ploch kruhové výseče AHK a $\triangle HNK$. Kepler dokázal, že přestože se planeta pohybuje po eliptické dráze, lze k poměřování součtu vzdáleností mezi ní a Sluncem použít kruhovou plochu.

Posléze dospěl k tomu, že čas, který Mars (M) potřebuje k přemístění podél oblouku eliptické dráhy AM , lze určit pomocí obsahu plochy kruhové výseče AKN , kde N označuje polohu Slunce; v *Nové astronomii* uvedl: „Oblouk elipsy AM , jehož čas je poměřován plochou AKN .“

Matematické vyjádření elipsy v *Nové astronomii* ne-nalezáme, není v ní rovnice elipsy v kartézské soustavě souřadnic, jakož ani rovnice v polární soustavě souřadnic. Posledně zmiňovanou a dnes nejčastěji používanou polární rovnici elipsy zavedl německý matematik Nikolaus Mercator (1620–1687) roku 1664 v [10].

Fyzikální metody

Současné s důkazným matematickým postupem se Kepler pokusil objasnit dráhu planety rovněž fyzikálním způsobem. Neznal gravitační zákon, souvislost síly se zrychlením či pohybové rovnice nezbytné ke správnému řešení problému dvou těles. Předpokládal gravitační působení pouze mezi tělesy nacházejícími se v klidu. Gravitační sílu do úvah o pohybu planet kolem Slunce zabudoval až o osmdesát let později Newton, který v knize první, větě páté *Principií* [6] hledal závislost platící pro sílu působící mezi Sluncem a planetou, jež se pohybovala po eliptické dráze.

Kinematika počátku 17. století znala pouze rovnoměrný přímočarý, respektive kruhový pohyb. Studium nerovnoměrného pohybu bylo teprve v počátcích. Současník Keplera Galileo Galilei (1564–1642) začal zkoumat rovnoměrně zrychlené pohyby – volný pád či pohyb po nakloněné rovině. Kepler našel přesný matematický popis nerovnoměrného pohybu Marsu, přestože neprobíhal ani po přímce či kružnici.

Nerovnoměrný pohyb po eliptické dráze popsal prostřednictvím vedlejších pojmů, např. pomocí plochy opsané průvodičem, myšleno za stejné časové okamžiky. Zavedl tak plošnou rychlost, která při pohybu po eliptické dráze zůstávala konstantní. Základní pojmy soudobé kinematiky, jako rychlost či zrychlení, stejně jako z dynamiky setrvačnost Kepler při výkladu nepoužíval.

K výkladu interakce mezi Sluncem a Marsem použil tehdy módní magnetickou hypotézu Williama Gilberta (1544–1603). Předpokládal, že každé z uvedených těles má vlastní magnetické pole, a tudíž mezi nimi existuje silové působení na dálku. Planetární magnetická osa Marsu v apsidách (aféliu, perihéliu) byla kolmá k průvodiči Slunce–Mars, přitahování tak nenastávalo. Při pohybu planety od afélie byl jeden pól jejích vláken k Slunci bližší, důsledkem bylo přitahování k němu. Tento proces skončil v perihéliu, kde se působení opět stalo neutrálním. Jestliže se Mars pohyboval od perihélie, byl druhý pól jeho vláken bližší k Slunci, výsledkem bylo odpuzování od něho. Při pohybu planety podél přímky apsid nebyl průvodič kolmý k magnetické ose, proto nastávala magnetická interakce se Sluncem. Z popsaného fyzikálního děje se Kepler snažil stanovit přesné pravidlo pro vzdálenosti planety. Excentricita elipsy regulovala intenzitu interakce magnetických vláken Marsu se Sluncem. Přibližování a vzdalování planety od Slunce záviselo na velikosti vzájemného magnetického působení obou těles. Podobně jako u magnetu Kepler předpokládal pokles působící síly s rostoucí vzdáleností.

O správnosti použití fyzikální magnetické hypotézy Kepler nepochyboval. Její vhodnost obhajoval v *Nové astronomii* slovy: „Pokud by fyzikální příčiny, které jsem na počátku přijal jako principy, nebyly platné, nikdy by nemohly obstát v tak důkladném zkoumání.“

Zákon ploch

Kepler jej objevil v roce 1602. Při jeho odvození vycházel z analýzy pozorovaného nerovnoměrného pohybu Marsu, ze studia změn úhlové rychlosti planety. Zjistil, že v perihéliu opsala za dva měsíce oblouk o úhlu $37,0^\circ$, zatímco v aféliu za stejnou dobu pouze úhel $25,8^\circ$. V *Nové astronomii*, kap. 39, dospěl k závěru, že rychlost Marsu je nepřímo úměrná vzdálenosti od Slunce. Hybná síla uvádějící do pohybu Mars vycházela podle německého astronoma z centrálního tělesa Sluneční soustavy. Pokud Slunce ovlivňuje pohyb planet, musí působit intenzivněji v jeho blízkosti. Zde se bude pohybovat planeta s větší rychlostí, zatímco ve větší vzdálenosti pomaleji, zobrazeno v závislosti na vzdálenosti od Slunce.

Zákon ploch vyslovil Kepler v *Nové astronomii* ve dvou zněních:

1. Rychlost planety se mění nepřímo úměrně se vzdáleností od Slunce, kap. 39.
2. Rychlost planety se mění tak, že průvodič spojující planetu se Sluncem opisuje stejné plochy za stejné časy, kap. 40.

První znění označujeme jako tzv. zákon vzdáleností, který byl ve své době chápán jako fyzikální zákon. Dnešní formulaci zákona ploch se blížilo druhé znění, na úrovni podávané Keplerem bylo spíše geometrickým vyjádřením, matematickým prostředkem k interpretaci fyzikální problematiky.

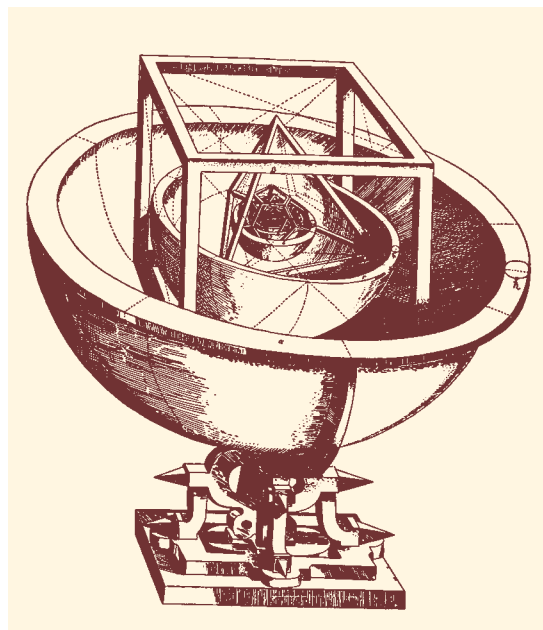
Jak známe v současnosti, první vyjádření zákona ploch by bylo správné pouze tehdy, jestliže bychom uvažovali jenom tečnou složku rychlosti. U druhého konstantní plošná rychlost vyjadřuje zachování momentu hybnosti, které je důsledkem centrálnosti gravitační síly.

Později si Kepler vyjasnil, že přesným vyjádřením zákona ploch je druhá formulace, zatímco první zákon vzdáleností platí spolehlivě pouze pro apsidy. Historicky však objev závislosti mezi rychlostí a vzdáleností od středu oběžného pohybu hrál zásadní roli při odvození zákona ploch. Ne zcela výstižný aproximativní zákon vzdáleností vedl k pozdější formulaci přesného zákona ploch pro eliptickou dráhu.

Eliptický zákon

Umístěno do historie, začátkem r. 1605 Kepler dostal inspirující nápad o možném eliptickém tvaru dráhy Marsu. K vyslovení eliptického zákona dospěl autor analýzou tabulky propočítaných vzdáleností, kde zjistil nesoulad výsledků výpočtů a pozorovacích údajů. Provedl proto úpravu librační metody a dospěl k velmi blízkým hodnotám vzdáleností odpovídajícím pohybu po eliptické dráze, což ho vedlo ke konkrétním závěrům v kap. 58, kde Kepler psal, že dráha z kap. 43 je příliš velká a z kap. 45 příliš malá. Proto pouze elipsa ležící uprostřed obou je správným vystižením dráhy. Na konci kap. 58 *Nové astronomie* uvedl: „... jakýkoliv tvar planetárních drah musí být opuštěn, kromě dokonalé elipsy...“

Za matematické vyjádření eliptického zákona lze v *Nové astronomii* v kap. 58 považovat odvození vztahu pro vzdálenost Slunce–Mars, jak moderní symbolikou popsala Davisová [11]. Při označení ohniskové vzdálenosti (viz obr. 2) $NH = ae$, $NB = a$, $HB = b \vee \Delta NBH$ platí $b^2 = a^2 - a^2 e^2$. Ve shodě s postupem Keplera v *Nové astronomii* i my používáme znovu klíčový obr. 2 elipsy, kde platí $ML : KL = b : a$, v ΔHKL vyjádříme $KL = a \sin \beta$, $ML = b \sin \beta$, kde β je $\angle LHK$. Zavedeme pravou anomálii $\angle ANM$, v ΔMNL je $ML = b \sin \beta$, $NL = a (\cos \beta + e)$. Dosazením do vztahu $r^2 = NM^2 = ML^2 + NL^2$ obdržíme $r^2 = b^2 \sin^2 \beta + a^2 (\cos \beta + e)^2$. Po úpravách získáme $r^2 = a^2 (1 + 2e \cos \beta + e^2 \cos^2 \beta)$, $r = a (1 + e \cos \beta)$, tedy vztah



Keplerova představa o uspořádání Sluneční soustavy *Mysterium cosmographicum* (Tajemství vesmíru), 1596.

» ... poměr, který je mezi oběžnými dobami kterýchkoliv dvou planet, je přesně půldruha násobkem poměru středních vzdáleností... «

pro *průvodič (rádiusvektor) r* prostřednictvím *excentrické anomálie* β . Kepler obdržel rovnici eliptické dráhy s počátkem v jednom ohnisku, která reprodukovala téměř přesně planetární vzdálenosti. Výpočty potvrdily, že excentrická anomálie β byla takto správně propočítávána. Připomínáme, že tento postup předpokládal zvládnutí vzájemných přepočtů úhlů anomálií.

Nalezený vztah zachycoval změnu vzdálenosti Marsu od Slunce v závislosti na jeho poloze. Pravděpodobně Kepler nejprve ani plně nechápal jeho přesný význam, neboť neznal analytickou geometrii. Až když použít magnetická hypotéza spojená s propočtem librace dávala stejné vzdálenosti jako z geometrických úvah, Kepler definitivně křivku identifikoval jako elipsu.

Odhalené tajemství dráhy Marsu, jediná a elegantní křivka – elipsa – nahradila složitý systém deferentů, epicyklů, ekvantů a excentrických kružnic. V *Nové astronomii* byl eliptický tvar dráhy planety odvozen pomocí zákona ploch a ten zpětně potvrzen nalezenou elipsou.

Harmonický zákon

První dva Keplerovy zákony se původně historicky týkaly pohybu pouze jediné planety – Marsu. Po roce 1609 Kepler ověřoval a potvrdil jejich platnost postupně také pro ostatní planety. Třetí zákon se vztahoval k více planetám, neboť Kepler přešel k obecnějšímu hledání řádu pro uspořádání a pohyb planet ve Sluneční soustavě, původu v ní existujících harmonických proporcí. Napadla ho myšlenka zkoumat souvislost mezi vzdálenostmi planet od Slunce a jejich oběžnými dobami. Přitom vycházel ze studia vztahu mezi úhlovou rychlostí planet a jejich vzdáleností od Slunce, v dnešní podobě z invariantu $r^3\omega^2 = konst.$ Ke konkrétním matematickým závěrům dospěl v roce 1618, zachytil je v knize *páté Harmonie světa* [2] slovy: „Ale je to věc zcela jasná a přesná – poměr, který je mezi oběžnými dobami kterýchkoliv dvou planet, je přesně půldruha násobkem poměru středních vzdáleností, tedy samotných drah; ovšem je přitom třeba dbát na to, že aritmetický průměr obou průměrů eliptické dráhy je poněkud menší než větší průměr...“

V latinském jazyce 17. století výrazem „půldruha násobek poměru“ rozumíme skutečnost, že první veličiny, tj. oběžné doby, je třeba vzít ve druhé mocnině a další veličiny – střední vzdálenosti – v mocnině třetí. Průměry eliptické dráhy Kepler rozuměl velkou a malou poloosu elipsy, střední vzdáleností potom aritmetický průměr z minimální a maximální vzdálenosti planety od Slunce.

Jasnější formulace Keplerových zákonů nalezneme až v *Souhrnu koperníkovské astronomie* [12], vydávaném v letech 1618–1621.

Keplerovy zákony byly autorem vyjadřovány v jeho spisech slovně, vlastní historický objev byl učiněn především pomocí komplikované syntetické geometrie. Staly se důležitým spojovacím mostem pro přechod z geometrie do astronomie, z kinematiky směrem k dynamice. Nikoliv náhodou se Keplerovým zákonům, jak ještě ukážeme, věnovaly takové osobnosti fyziky, jako byli Newton, Maxwell či Feynman.

Paradoxy a nepřesnosti Keplerova postupu

Kepler v *Nové astronomii* dospěl k formulacím prvních dvou zákonů pohybu planet. Tyto přesné zákony (v jeho době pravidla) však našel na základě nepřesných a místy i mylných předpokladů. Konkrétně

například při objevu zákona ploch vycházel z chybných předpokladů – kruhové dráhy Marsu. Formuloval a následně aplikoval zákon vzdálenosti, který však obecně neplatil. Při tvorbě modelů drah hledal vztahy pro úhly kolem imaginárního bodu – *ekvantu* –, který neměl žádný fyzikální podklad. Skutečnost, že Slunce se nachází v jednom z ohnisek elipsy, není explicitně zmiňována v *Nové astronomii* vůbec, Kepler psal pouze o místě pro něj *punctum eccentricum* – excentrickém bodě. K podpoře matematického modelu dráhy použil u výkladu interakce Slunce–planeta věcně nepravdivou fyzikální magnetickou hypotézu. Mylně Kepler předpokládal, že Slunce uvádí do pohybu planety. Paradoxně závěrečným výsledkem všech uvedených chybných kroků byl správný eliptický zákon, jakož i zákon ploch.

Další Keplerovy nepřesnosti byly spojeny s použitými matematickými metodami. Uvědomoval si jejich existenci, chápal je jako nezbytnou součást aproximačních a jinak korektních postupů. Měly svoji příčinu v nedostatečné úrovni matematických znalostí na počátku 17. století. Bez použití metod matematické analýzy nemohl Kepler náležitě přesně studovat složitý pohyb Marsu kolem Slunce. Musel proto sám vytvořit použitelné aproximační matematické prostředky pro výpočet změny obsahu eliptického sektoru, ohraničeného dvěma průvodiči a obloukem elipsy. Eliptický sektor vyjadřoval pro něj fyzikální veličinu – plošnou rychlost. Důvtipně tak převedl astronomický problém z geometrického na fyzikální.

Upřesnění Keplerových zákonů

Kepler v *Nové astronomii* dospěl k eliptickému tvaru drah planet. Objasnil jejich nerovnoměrný pohyb a objevil souvislost dob oběhů planet se vzdáleností od Slunce, které se v jeho výpočtech nepohybovalo. Řešil tak zjednodušený problém dvou těles Slunce–planeta, u něhož, jak víme dnes, existuje přesné analytické řešení, jestliže obě tělesa interagují prostřednictvím centrální síly v závislosti na $1/r^2$. Omezení pouze na dvě tělesa je idealizací neplatící obecně, neboť ve Sluneční soustavě se vzájemně přitahují všechna v ní přítomná kosmická tělesa. Planety se proto nepohybují po přesných eliptických drahách, v dlouhodobějším časovém intervalu se u nich projevují odchylky, tzv. poruchy. V době Tychona Braheho se při určování poloh planet nepoužíval dalekohled, tudíž odchylky nebylo možné odhalit. Od poloviny 17. století však polohy planet již byly určovány pomocí dalekohledu se záměrným křížem, čímž se přesnost pozorování zvýšila na několik obloukových vteřin, což vedlo ke zjištění odchylek od eliptického pohybu.

Kosmická tělesa – Slunce a planety –, v prvním přiblížení považoval Newton za sféricko-symetrická. Propočtem tzv. slupkového modelu dokázal, že navenek se gravitačně chovají jako částice o stejné hmotnosti nacházející se ve středu. Vzhledem k velkým vzdálenostem mezi nimi bylo použití Newtonova gravitačního zákona plně vyhovující.

Newton v *Principiích* upřesnil Keplerovy zákony. Rozšířil jejich platnost nejen pro dráhy kruhové a eliptické, ale také na parabolické i hyperbolické. Harmonický zákon doplnil o hmotnosti centrálního a obíhajícího tělesa – Slunce a planety –, do tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_S + m_p)}{4\pi^2}.$$

V problému dvou těles zabudoval do řešení jejich oběh kolem společného středu hmotnosti. Později byl u drah planet pozorován nadbytečný posuv jejich perihélií, daný rozdílem hodnot úhlu stáčení φ pozorovaného a propočítaného pomocí Newtonovy mechaniky. Jde o jev, který obecná teorie relativity popisuje vztahem

$$\delta\varphi = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2(1-e^2)c^2}.$$

Nejvýraznější je u Merkuru, činí 43" za století, u námi sledovaného Marsu dosahuje přibližně 1" za století.

Ze soudobého pohledu fyzikálně komentováno zákon ploch platí pro libovolné centrální silové pole, zatímco eliptický a harmonický zákon platí pro případ poklesu působení centrální síly v závislosti na $1/r^2$ od středu. Původní znění Keplerových zákonů bylo kinematické, neobsahovalo hmotnosti planet. Až Newtonem upřesněný harmonický zákon již má kinematicko-dynamický charakter.

Důkaz prvních dvou Keplerových zákonů prostřednictvím hodografu

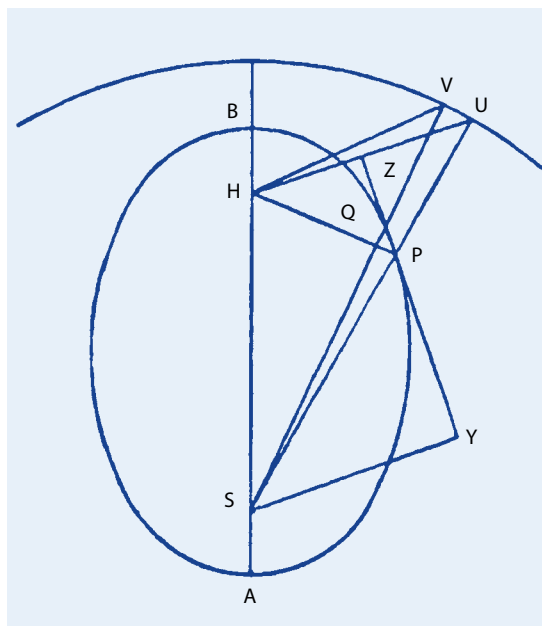
Méně známou, ale historicky zajímavou byla myšlenka Wiliama Rowana Hamiltona (1805–1865) v [13], kde navrhl využití rychlosti jako samostatné neznámé k analýze pohybu planet. Použil hodograf (rychlostní diagram) – křivku zachycující časový vývoj vektoru rychlosti. Polohový vektor – radiusvektor – reprezentoval rychlost pohybu tělesa. Národně popisoval změny směru a velikosti rychlosti pohybující se planety. Vektor rychlosti planety v libovolném okamžiku směřoval tangenciálně k její dráze v prostoru. Jestliže se planeta pohybovala po uzavřené eliptické dráze, pootáčení vektoru rychlosti probíhalo nerovnoměrně. Měnil se přitom nejen jeho směr, ale také velikost. V perihéliu byla velikost rychlosti maximální, v aféliu minimální. Konec vektoru rychlosti opisoval pravidelný mnohoúhelník, ve spojitě limitě kružnici, hodograf měl kruhový tvar, počátek vázaného vektoru se nacházel v pevném bodě – středu hodografu. Hodograf tak poskytoval názornou představu o změně polohového vektoru rychlosti.

Obdobně v jednodušším případě pohybu planety po kruhové dráze zůstávala velikost rychlosti konstantní, všechny změny vektoru rychlosti vedly k rovnoměrné rotaci kolem počátku souřadnic prostoru rychlostí. Proto hodograf rychlosti v tomto případě byl také kružnicí. Její poloměr byl roven neměnné hodnotě velikosti rychlosti (kruhové rychlosti).

Mimo rámec našeho historického výkladu je obecný důkaz právě uvedených tvrzení provedený současnou vektorovou symbolikou zachycen v [14].

Pohyby v radiálním gravitačním poli vyjadřující pohyb planety kolem Slunce (tělesa s větší hmotností) mají tu vlastnost, že probíhají v neměnné dráhové rovině v důsledku platnosti zákona zachování momentu hybnosti planety $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, vektor plošné rychlosti je kolmý k rovině dráhy planety. Hamilton dokázal derivováním podle času invarianci vektoru, nyní nazývaného Laplaceův–Rungeův–Lenzův $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - G(M_S + m_p)\frac{\vec{r}}{r}$ v [15]. Leží v rovině eliptické dráhy, míří od ohniska k perihéliu, jeho velikost je dána numerickou excentricitou dráhy.

Aplikací hodografu na studium planetárních pohybů se zabýval James Clerk Maxwell (1831–1879) v roce



Obr. 3 Maxwellův důkaz zákona ploch.

1877. Uvedeme překlad vybraných částí textu z jeho spisu [16]. Nejprve v § 132 připomněl aplikaci hodografu slovy: „*Při použití metody hodografu k planetě, jejíž dráha leží v jedné rovině, je vhodné předpokládat, že vektor hodografu je kolmý k rychlosti, kterou zobrazuje, místo toho, aby byl s ní rovnoběžný.*“ V následujícím § 133 provedl důkaz platnosti zákona ploch, použil obr. 3: „*Nechť APQB je eliptická dráha, nechť S bude Slunce nacházející se v jednom ohnisku, H je druhé ohnisko. Prodloužíme přímku SP do bodu U tak, aby SU bylo rovno velké ose AB. Dále spojíme body úsečkou HU, která bude úměrná a kolmá k rychlosti planety v P. Bod Z leží uprostřed úsečky HU, spojíme ho s P, přímka ZP bude tečnou k elipse v bodě P, nechť SY je kolmice spuštěná na tečnu z bodu S.*“

Jestliže v je rychlost planety v bodě P a h je dvojnásobná plocha opsaná za časovou jednotku, potom $h = v \cdot SY$. Vedle toho, pokud b je polovina malé osy elipsy, potom $SY \cdot HZ = b^2$. Nyní $HU = 2 HZ$, tudíž $v = \frac{1}{2} h/b^2 HU$. Tak tedy je úsečka HU vždy úměrná rychlosti a kolmá k jejímu směru. Avšak úsečka SU je vždy rovna AB. Tudíž kružnice se středem v S a poloměrem AB je hodografem planety, přičemž bod H je počátkem hodografu. Odpovídajícími body dráhy a hodografu jsou ty, které leží na jedné přímce procházející bodem S. Tak P odpovídá bodu U, Q bodu V.

Rychlost udělená tělesu za čas v průběhu jeho přemístění z P do Q je zachycena geometrickou růzností vektorů HU a HV, tj. křivkou UV, tato rychlost je kolmá k odpovídajícímu oblouku kružnice, a proto, jak jsme dokázali, směřuje k S.

Jestliže PQ je oblouk opsaný v průběhu velmi malého času, pak UV zachycuje změnu rychlosti získanou za tento čas; protože UV je oblouk kružnice, jejíž střed je bod S, pak oblouk UV bude mírou úhlového přemístění planet vzhledem k S v průběhu tohoto času. Tudíž zrychlení je úměrné úhlové rychlosti, ale ta je podle § 129 nepřímou úměrnou kvadrátu vzdálenosti SP. Tedy zrychlení planety směřuje ke Slunci a mění se nepřímou úměrně vzdálenosti od Slunce.

Takový je zákon, podle kterého se mění přitažlivost Slunce působící na planetu, jestliže se planeta pohybuje po své dráze a mění svoji vzdálenost od Slunce.“

» Není snadné užívat geometrické metody k objevu věcí. Je to velmi obtížné, ale elegance předvedení po skutečných objevech je opravdu velmi velká. «
R. P. Feynman

Podrobnosti důkazu eliptického tvaru dráhy planety vyplývají z jednotlivých kroků výše uvedeného Maxwellova textu – připomeneme pouze hlavní geometrické myšlenky. Hodograf rychlostí je řídící kružnicí elipsy (dráhy planet) se středem v S a poloměrem AB . Osa ZY úsečky HU určuje směr okamžité rychlosti, je tečnou k elipse v P . Pro úhly v bodě P platí podle tzv. optické věty pro elipsu $\angle SPY = \angle HPZ$ a dále $\angle SPY = \angle UPZ$. Detailně je problematika důkazů citovaného Maxwella a následně zmiňovaného Feynmana zachycena v příspěvku Podolského v [17].

Richard Phillips Feynman (1918–1988) ve své přednášce [18] postupoval ve svém geometrickém důkazu Keplerových zákonů obdobně jako Maxwell. Navíc dodal výstižný a vtipný komentář: „Není snadné užívat geometrické metody k objevu věcí. Je to velmi obtížné, ale elegance předvedení po skutečných objevech je opravdu velmi velká.“

Keplerovy zákony v soudobých učebnicích

V gymnaziální učebnici *Mechanika* [3] jsou tyto zákony zařazeny do kapitoly *Gravitační pole*, tématu *Pohyby těles v gravitačním poli Slunce*. Studenti jím vstupují do astronomie, fyzikální problematiky pohybů planet ve Sluneční soustavě. Úvodní odstavec textu charakterizuje historické okolnosti objevu zákonů. Ty lze doplnit důležitým historickým sdělením, že Kepler ve své teorii pohybu planet vycházel nejen z matematického zpracování pozorovacích dat, ale pokoušel se také o objasnění fyzikálních příčin pohybu planet.

V učebnici je znění Keplerových zákonů následující:

- I. *Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.*
- II. *Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.*
- III. *Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií.*

Komentováno, eliptický zákon popisuje tvary drah planet. Výklad zákonitostí pohybu planet kolem Slunce podává zákon ploch, který objasňuje nerovnoměrnost jejich pohybu. Harmonický zákon vyjadřuje souvislost dob oběhů planet kolem Slunce s velikostí hlavních poloos drah. Historický význam tohoto zákona, který umožňoval určování vzdáleností planet při znalosti vzdálenosti Země–Slunce a jejich siderických oběžných dob, připomíná do výkladového textu učebnice zařazená úloha.

Osvojení zákonitostí pohybu planet se v učebnici opírá o matematickou znalost vlastností elipsy a pojmů s ní spojených – ohnisko, hlavní poloosa, průvodič, k nimž je proveden stručný výklad. Jeho optimálnost narušuje okolnost, že v gymnaziální matematice jsou vlastnosti elipsy, navíc pouze středový tvar její rovnice v pravoúhlé soustavě souřadnic, probírány až ve vyšších ročnících. Navíc pro interpretaci Keplerových zákonů je mnohem vhodnější a názornější vyjádření elipsy v polárních souřadnicích. Ohnisko a poloha Slunce v něm mají zásadní fyzikální význam. Na úrovni gymnaziální výuky zůstává pojem ohnisko spíše geometrický, jako východisko ke kinematickým úvahám o pohybu planet, spojený s popisem obsahu plochy. Pojem plošná rychlost není explicitně zaváděn vůbec.

Procvičování zákona zachování mechanické energie při pohybech planet a ověřování harmonického zákona je umístěno do úloh. V obsahu učebnice je postrádán upřesněný tvar zmiňovaného zákona. Jeho aplikace poskytuje možnost stanovení hmotností planet, jež mají měsíce, či v dnešní době hmotností černých děr v jádrech galaxií, kolem kterých obíhají hvězdy či krouží plyn. Takto lze přispět k prohloubení znalostí studentů o fyzikální podstatě pohybů ve vesmíru. Zkušenosti ze zahraničí ukazují, že na středoškolské úrovni lze takto postupovat.

V úvodním kurzu fyziky je na vysokých školách používána vysokoškolská učebnice [4], ve které jsou Keplerovy zákony zařazeny do kapitoly *Gravitace*. V ní je jejich formulace následující:

- I. (zákon oběžných drah): *Planety se pohybují po elipsách (jen málo odlišných od kružnic), v jejichž společném ohnisku je Slunce.*
- I. *Obecná formulace: Částice se pod vlivem gravitační síly pohybuje po kuželosečce (kružnici, elipse, parabole nebo hyperbole), která má ohnisko v bodě, kam směřuje gravitační síla.*
- II. (zákon ploch): *Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou stejně velké.*
- III. (zákon oběžných dob): *Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah.*

Výkladu Keplerových zákonů předchází Newtonův gravitační zákon a zákon zachování celkové mechanické energie při pohybech v gravitačním poli. Je připomínáno rozšíření eliptického zákona i na další kuželosečky. Zákon ploch je odvozován prostřednictvím vyjádření výšece plochy a jejího přírůstku při zachycení pohybu průvodiče. Nejprve jsou Keplerovy zákony sdělovány a teprve následně je uvedeno, že zákon ploch je ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti. Úplné znění harmonického zákona, spojené se zavedením hmotnosti centrálního a obíhajícího tělesa, je odvozováno aplikací druhého Newtonova pohybového zákona, Newtonova gravitačního zákona a vztahu pro dostředivou sílu. V *Otázkách, cvičeních a úlohách* jsou poznatky spojené s Keplerovými zákony vhodně prohlubovány aplikací i na jiná tělesa než na planety (komety, dvojhvězdu LMC X-3 a družice). Tak je potvrzována myšlenka, že pohyb všech kosmických těles se řídí Keplerovými zákony. V případě harmonického zákona by stálo za úvahu vzhledem k historické souvislosti s eliptickým zákonem neomezovat se při interpretaci pouze na kruhový tvar dráhy. Zpracování poměrně podrobného textu komentované učebnice je klasickým postupem výkladu problematiky, jeho úroveň je pro studenty přiměřená, odpovídající prvnímu ročníku vysoké školy.

V další používané vysokoškolské učebnici [5] je text Keplerových zákonů umístěných do kapitoly *Teorie gravitace* tento:

- I. *Každá planeta se pohybuje kolem Slunce po elipse, přičemž Slunce je v jednom z ohnisek.*
- II. *Průvodič spojující Slunce s planetou opisuje stejné plochy za stejné časové intervaly.*
- III. *Druhé mocniny period libovolných dvou planet jsou úměrné třetím mocninám velkých poloos jejich drah: $T \sim a^{3/2}$.*

MATTER AND MOTION

BY THE LATE

J. CLERK MAXWELL

M.A., LL.D. EDIN., F.R.S.S. L. & E.

HONORARY FELLOW OF TRINITY COLLEGE, AND PROFESSOR OF
EXPERIMENTAL PHYSICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE

REPRINTED: WITH NOTES AND APPENDICES BY

SIR JOSEPH LARMOR, F.R.S.

FELLOW OF ST JOHN'S COLLEGE, AND
LUCASIAN PROFESSOR OF MATHEMATICS

LONDON

THE SHEDDON PRESS

NORTHUMBERLAND AVENUE, W.C.

NEW YORK AND TORONTO: THE MACMILLAN CO.

PRINTED IN GREAT BRITAIN

1925

Titulní strana knihy J. C. Maxwella *Matter and Motion*.

V úvodu kapitoly uvádí učebnice [5] Newtonův gravitační zákon, následuje formulace Keplerových zákonů. Teprve potom je znovu a podrobně rozebírán Newtonův gravitační zákon. Newtonovy zákony dynamiky jsou zaváděny později. V závěru kapitoly jsou zařazeny *Příklady a cvičení* na Keplerovy zákony, včetně upřesněného harmonického zákona.

Závěrem komentování obsahu učebnic lze konstatovat, že v gymnaziální učebnici [3] jsou Keplerovy zákony zavedeny jako empirická tvrzení, v případě harmonického zákona pouze v jednoduchém tvaru. Hloubka jejich interpretace odpovídá středoškolskému zařazení. Na vysokoškolské úrovni v učebnici [4] jsou Keplerovy zákony již rozebírány hlouběji. Učebnice [5] se omezuje pouze na empirické vyjádření zákonů, s důrazem na procvičování v příkladech.

Jaké závěry lze učinit z porovnání obsahů textů Keplerových zákonů v historii a v soudobých učebnicích? Věcné rozdíly původní slovní podoby a moderních, didakticky upravených textů v učebnicích zásadní nejsou. Liší se odvození Keplerových zákonů – ve sledovaných učebnicích neodpovídá historickému, využívajícímu syntetickou geometrii. V současnosti je za optimální považován deduktivní postup z Newtonova gravitačního zákona a z jeho pohybových zákonů. Odvození vychází z přehlednějších matematických postupů používajících diferenciální počet, viz např. [4]. Druhou zaužívanou možností je odvození ze zákonů zachování energie a momentu hybnosti, viz např. [19]. Komplexní rozbor problematiky Keplerových zákonů, včetně jejich různých odvození, je u nás zpracován v [20].

Závěr

Článek seznámil čtenáře s reálnými historickými představami v procesu poznávání pohybu planet na počát-

ku 17. století a podal přehled obsahu soudobých učebnic v tématu Keplerovy zákony. Komplikované pozadí jejich objevu charakterizovala historická část článku. Jeho znalost lze využít při přípravě na výuku – jak na gymnáziích, tak i na vysokých školách. Například uvedením ukázek vybraných myšlenkových postupů a na nich demonstrováním pochybení v úvahách Keplera, včetně provedení jejich analýzy a objasnění, proč vznikly. Historickou koncepci výkladu je vhodné opírat o postupné modely dráhy Marsu a jejich vyvrácení. Takto studenti získají představu o tom, jak Kepler dospěl ke svým zákonům a následně snadněji pochopí geometrické úvahy Newtona v *Principiích*.

Literatura

- [1] J. Kepler: *Gesammelte Werke. Band III. Astronomia Nova*. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München MCMLI.
- [2] J. Kepler: *Gesammelte Werke. Band VI. Harmonices mundi*. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München MCMXXXV.
- [3] E. Svoboda, M. Bednařík, M. Šíroková: *Fyzika pro gymnázia – Mechanika*. Prometheus, Praha 2012.
- [4] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. 1. díl. Vutium, Brno 2014. Překlad z anglického jazyka.
- [5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky*. 1. díl. Fragment, Praha 2013. Překlad z anglického jazyka.
- [6] I. Newton: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Anglický překlad I. B. Cohen, A. Whitman. University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London 1999.
- [7] A. Einstein: „Albert Einstein über Kepler“, *Frankfurter Zeitung* 9. listopadu 1930. Překlad do českého jazyka H. Karlach.
- [8] V. Štefl: „Keplerovy kroky na cestě k elipse“, *Čes. čas. fyz.* **69** (2019), s. 190.
- [9] V. Štefl: „Jak Kepler dospěl k prvním dvěma zákonům v *Astronomia nova*“, *Čes. čas. fyz.* **68** (2018), s. 41.
- [10] N. Mercator: *Hypothesis Astronomica nova*. Ex officina Leybourniana, Londini 1664.
- [11] A. E. L. Davies: „Kepler's *Astronomia nova*: a geometrical success story“, *Kepler's Heritage in the Space Age*. Ed. A. Hadravová, T. J. Mahoney, P. Hadrava, Národní technické muzeum, Praha 2010, s. 17.
- [12] J. Kepler: *Gesammelte Werke. Band VIII. Epitome Astronomiae copernicanae*. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München MCMLIII.
- [13] W. R. Hamilton: "The hodograph, or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction", *Proc. Roy. Irish Acad.*, 1845–1847, Vol. III, s. 344.
- [14] E. I. Butikov: „The velocity hodograph for an arbitrary Keplerian motion“, *Eur. J. Phys.* **21**, (2000), s. 297.
- [15] W. R. Hamilton: "On the application of the method of quaternions to some dynamics question", *Proc. Roy. Irish Acad.*, 1847, Vol. III, Appendix, s. 36.
- [16] J. C. Maxwell: *Matter and Motion*. The Sheldon Press, London 1925, s. 105.
- [17] J. Podolský: Od Newtona ke Keplerovi. *Matematika, fyzika – minulost, současnost*. Sborník z XII. semináře, JČMF, Velké Meziříčí 2006, s. 52.
- [18] D. L. Goodstein, J. R. Goodstein: *Feynman's lost lecture. The Motion of Planets Around the Sun*. Vintage Books, London 1997. Lecture R. P. Feynman at March 13, 1964.
- [19] L. Motz, A. Duveen: *Essential of Astronomy*. Columbia University Press, New York 1977.
- [20] I. Štoll, J. Tolar, N. Jex: *Klasická teoretická fyzika*. Karolinum, Praha 2017.