

Historie Lagrangeova-Laplaceova důkazu stability sluneční soustavy

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta MU, Kotlářská 2, 611 37 Brno

O bjasnění stability sluneční soustavy bylo jedním ze stěžejních problémů nebeské mechaniky 18. století. K jeho řešení přispěla Leonhardem Eulerem (1703–1783) vyvinutá metoda variace dráhových elementů, popsaná v závěru článku [1]. Byla autorem použita ke zkoumání otázky, zda střední pohyby planet se podrobují periodickým, či neperiodickým změnám. O deset let později došlo k dalšímu rozvoji této metody studia vycházející ze vzájemných interakcí planet a následného ovlivnění jejich středního pohybu. První analýzy provedl roku 1760 Charles Euler (1740–1790) v [2], syn Leonharda Eulera. Získal za ně cenu Pařížské akademie věd. Rovněž bratr Charlese Johann Albert Euler (1734–1800) se podílel na zpracování metody, viz [3], jež dominovala při studiu planetárních poruch v 18. století. Její nejdokonalejší znění formuloval Joseph Louis Lagrange (1736–1813),



Obr. 2 Pierre Simon de Laplace (1749–1827).



Obr. 1 Joseph Louis Lagrange (1736–1813).

viz obr. 1, ve II. vydání Analytické mechaniky [4], jak bude dále rozvedeno.

Původní Eulerův postup převzal Pierre Simon de Laplace (1749–1827), viz obr. 2, který vyjádřil pohyb planet prostřednictvím diferenciálních rovnic a pokusil se určit změny dráhových elementů. V [5] zdůraznil význam sekulárních poruch pro tvorbu planetární teorie, přičemž pozornost věnoval přesnosti výpočtů. Konstatoval nesoulad dřívějších výsledků dosažených Eulerem a Lagrangem u výkladu nerovností Jupiteru a Saturnu. Proto provedl vlastní výpočet za použití aproximací vyšších řádů. Dospěl k závěru, že střední pohyby obou planet jsou imunní vůči dlouhodobým změnám. Poslední část citovaného spisu [5] se zabývá odvozením sekulárních nerovností dráhových elementů planet. Dnes chápeme sekulární nerovnosti jako neperiodické, narůstající s časem. Význam tohoto termi-

CHAPITRE VII.

Des inégalités séculaires des mouvemens célestes.

53. Les forces perturbatrices du mouvement elliptique introduisent dans les expressions de r , $\frac{dv}{dt}$ et s , du chapitre précédent, le temps t , hors des signes *sinus* et *cosinus*, ou sous la forme d'arcs de cercle qui en croissant indéfiniment, doivent à la longue, rendre ces expressions fautives; il est donc essentiel de faire disparaître ces arcs, et d'avoir les fonctions qui les produisent par leur développement en série. Nous avons donné pour cet objet, dans le Chapitre V, une méthode générale de laquelle il résulte que ces arcs naissent des variations du mouvement elliptique, qui sont alors fonctions du temps. Ces variations s'exécutant avec une grande lenteur, elles ont été désignées sous le nom d'*inégalités séculaires*.

Obr. 3 Ukázka z Laplaceova spisu *Traité de Mécanique Céleste*. Duprat, Paris 1799, vol. 1, s. 286.

nu však byl v původních spisech Lagrangea a Laplacea širší, zahrnoval i dlouhodobé periodické nerovnosti. V kompendiu [6], z něhož je ukázka textu, viz obr. 3, Laplace uvádí: „*Síly vyvolávající poruchy od eliptického pohybu, zavedené ve výrazech pro r , $\frac{dv}{dt}$ a s , v předcházející kapitole, čas t přes sinus a cosinus ve tvaru kruhového oblouku narůstajícího neomezeně... Jelikož tyto změny jsou vytvářeny velmi pomalým způsobem, bývají proto nazývány termínem sekulární nerovnosti.*“

Vraťme se ke spisu [5], ve kterém při restrikci problému pouze na dvě planety autor dokázal, že výstřednosti a sklony jejich drah jsou vždy velmi malé. Podnětnými pro další postup řešení se ukázaly závěrečné poznámky, v nichž Laplace vytyčil otázku, zda variace hodnot výše zmiňovaných dvou dráhových elementů se pohybují uvnitř omezeného intervalu. Později dokázal souvislost obou veličin a existenci omezujících hranic jejich změn. Takto zachycené vlastnosti dráhových elementů planet ve sluneční soustavě a jejich následné zobecnění se staly později východiskem pro důkaz její stability.

Pro analýzu problému sekulárních nerovností Laplace odvodil obecné rovnice pro pohyb planet v polárních souřadnicích. Řešení jejich poruch se opíralo o zákon všeobecné gravitace. V roce 1773 Laplace formuloval a 1776 publikoval v [7] (titulní list viz obr. 4) kritéria analýzy jeho platnosti, přičemž vycházel ze čtyř předpokladů (ukázka viz obr. 5):

1. Přitažlivost je přímo úměrná hmotnosti tělesa a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti.
2. Působící síla tělesa je výslednicí interakcí všech jeho částí.
3. Síla se šíří okamžitě.
4. Přitažlivost je stejná u tělesa v klidu jako v pohybu.

Záměrem Laplacea bylo prověřit jednotlivé fyzikální souvislosti uvedených předpokladů. Poněkud překvapivě začal svoji analýzu důsledky vyplývajícími z druhého bodu. Následně se začal zabývat i dalšími body a tomuto dlouhodobému výzkumu zasvětil celý život [8].

Je zajímavé, že připouštěl i pochybnosti o platnosti gravitačního zákona v malých vzdálenostech: „*Někteří filozofové se domnívají, že gravitační zákon vyjadřující vztah v závislosti nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti ve jmenovateli nemůže být pravdivý v malých vzdálenostech...*“.

Při řešení problému tří těles Lagrange ve spisu [9] (titulní list viz obr. 6), publikovaném roku 1774 a významaném cenou Pařížské akademie, zavedl do úvah

pomocnou potenciální poruchovou funkci R , což mu umožnilo zjednodušit řešení (v analyzované soustavě Slunce – Země – Měsíc) pohybu Měsíce započtením gravitačního vlivu vyvolaného Sluncem. Pro poruchovou funkci zavedl vztah

$$R = GM_S \left(\frac{1}{\Delta_{MS}} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r_{ZS}^3} \right), \quad (1)$$

kde M_S je hmotnost rušícího Slunce, Δ_{MS} vzdálenost Měsíce a Slunce, r_{ZS} vzdálenost Země a Slunce, x, y, z jsou geocentrické souřadnice Měsíce, x', y', z' obdobné souřadnice Slunce.

Teoretická řešení pohybu Měsíce v soustavě Slunce – Země – Měsíc a pohybu Saturnu v soustavě Slunce – Jupiter – Saturn jsou principiálně analogická. Rozdílné prostorové rozložení jmenovaných těles v obou soustavách a odtud vyplývající důsledky pro metody a výsledky výpočtů byly diskutovány v článku [1].

Při aplikaci vztahu (1) na soustavu Slunce – Jupiter – Saturn má poruchová funkce tvar

$$R = Gm_J \left(\frac{1}{\Delta_{Ja}} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r_{SJ}^3} \right),$$

kde m_J je hmotnost rušící planety Jupiteru, Δ_{Ja} vzdálenost mezi Jupiterem a Saturnem, r_{SJ} vzdálenost mezi Sluncem a rušící planetou Jupiterem, x, y, z jsou heliocentrické souřadnice rušené planety Saturnu vzhledem ke Slunci, zatímco x', y', z' jsou ve stejné vztážené soustavě souřadnice Jupiteru opět k Slunci. Poruchová funkce dosahuje nízkých hodnot při malé velikosti výrazu v závorce.

V historii výkladu pohybu planet bylo nejprve vycházeno z problému dvou těles, v našem případě pohybu planety kolem Slunce, za předpokladu její eliptické dráhy. Při tomto tzv. keplerovském pohybu je $R = 0$. Později provedené výpočty poruchových funkcí, gravitačního vlivu dalších planet vyjádřených prostřednictvím dodatečných poruchových sil, vnesly menší korekce ke zmiňované teorii. Jsou vyjádřeny výše uvedeným vztahem, jak později podrobně rozebral Laplace v [10], který zavedl název samotné funkce.

Připomínáme, že pozorované odchylky poloh planet od těch odpovídajících eliptické dráze jsou na obloze u Merkuru 15", Venuše 30", Marsu 2', Uranu 3'. Největších hodnot dosahují u Jupiteru 28' a Saturnu 48'.

Laplaceovy diferenciální rovnice v [7] obsahovaly neznámé souřadnice, zachycovaly vyjádření sil

SUR LE PRINCIPE
DE LA
GRAVITATION UNIVERSELLE
ET SUR LES
INÉGALITÉS SÉCULAIRES DES PLANÈTES QUI EN DÉPENDENT (*).

*Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris (Savants étrangers),
année 1773, t. VII, 1776.*

Obr. 4 Titulní list Laplaceova spisu *Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent*. Mémoires de l'Académie royale des Science de Paris, anné 1773.

DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE.

213

2° La force attractive d'un corps est le résultat de l'attraction de chacune des parties qui le composent.

3° Cette force se propage dans un instant, du corps attirant à celui qu'il attire.

4° Elle agit de la même manière sur les corps en repos et en mouvement.

Je vais examiner ces quatre suppositions et voir jusqu'à quel point elles sont conformes à ce que l'on observe.

Obr. 5 Ukázka z Laplaceova spisu *Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent*. Mémoires de l'Académie royle des Science de Paris, anné 1773, s. 213.

a poruchových funkcí, byly však příliš komplikované na přímý způsob řešení. K němu vedly postupné aproximace, přičemž první „bezporuchové“ hodnoty souřadnic byly dosazovány do výrazů pro síly. Následné integrace rovnic umožňovaly nalezení změn souřadnic. Hmotnosti rušících planet vyjadřoval Laplace relativně vzhledem k hmotnosti Slunce, největší velikost zlomku činila v případě Jupiteru $1/1067$. Příčiny určitého nesouladu propočtu výsledků sekulárních změn poloh byly spojeny jak s neznalostí přesných hodnot hmotností planet, tak se zavedením poruch spojených s Uranem, objeveným až roku 1781.

Další upřesnění bylo obsaženo v Lagrangeově spisu [11] z roku 1776, věnovaném sekulárním pohybům dráhových sklonů a uzlů planet. V něm se poprvé objevily lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty reprezentující střední pohyb planet. Rovnice byly řešitelné již bez aproximace.

Postup Lagrangea popisoval poruchy jako důsledek vzájemné gravitační interakce tehdy známých šesti planet, které byly malé vzhledem ke gravitačnímu působení Slunce. Planety proto nejprve považoval za pohybující se po eliptické dráze v souladu s Keplerovými zákony. Poruchové působení zachytil prostřednictvím pozvolných změn dráhových elementů eliptické dráhy. Popis vycházel z označení $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ vzdálenosti planety od Slunce, F/r^2 síly působící na planetu od Slunce, X, Y, Z x -ové, y -ové a z -ové složky celkové poruchové síly. Diferenciální rovnice pohybu planety v pravouhlých souřadnicích měly tvar

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Fx}{r^3} + X, \quad 0 = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Fy}{r^3} + Y, \\ 0 &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Fz}{r^3} + Z. \end{aligned} \quad (2)$$

Jestliže poruchové síly X, Y, Z byly nulové, rovnice získaly tvar

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Fx}{r^3}, \quad 0 = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Fy}{r^3}, \quad 0 = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Fz}{r^3}. \quad (3)$$

Uvedené rovnice byly integrovatelné, jejich konečný integrál vedl k hodnotám x, y, z . Šest integračních konstant určovalo šest dráhových elementů eliptické dráhy. V pozdější interpretaci Lagrange za ně zvolil velikost velké poloosy elipsy, výstřednost, polohu velké poloosy, respektive přímky apsid, sklon dráhové roviny elipsy, polohu uzlové přímky, respektive přímky průsečíku dvou rovin, dobu středního oběhu, respektive hodnotu střední délky v daném čase, detailněji viz [12]. Z šesti dráhových elementů první tři (velká poloosa, výstřednost, počáteční poloha velké poloosy) určovaly

velikost a tvar elipsy, další tři (sklon dráhy, poloha uzlové přímky a přímky apsid) stanovovaly polohu elipsy v prostoru.

Derivací diferenciálních rovnic (2) podle času obdržel Lagrange tři rovnice prvního řádu, z nichž každá obsahovala jednu integrační konstantu. Rovnice společně se třemi integrálními rovnicemi poskytovaly šest diferenciálních rovnic prvního řádu, každá obsahovala jednu integrační konstantu. Šest rovnic umožňovalo určení šesti integračních konstant v jednotkách hodnot $x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt$ v libovolném čase. Nechť $V = k$, kde k je konstanta, V je funkce $x, y, z, t, dx/dt, dy/dt, dz/dt$. Derivací Lagrange dostal $dV = 0$, diferenciální rovnice druhého řádu, neboť

$$-Fx \frac{dt}{r^3}, -Fy \frac{dt}{r^3}, -Fz \frac{dt}{r^3}$$

byly identicky rovny nule. Následně vyjádřil poruchové síly X, Y, Z , jejichž vliv se projevil v hodnotách druhých derivací

$$d \frac{dx}{dt}, d \frac{dy}{dt}, d \frac{dz}{dt}.$$

Obdržené výrazy

$$-\frac{Fx}{r^3} dt - Xdt, -\frac{Fy}{r^3} dt - Ydt, -\frac{Fz}{r^3} dt - Zdt$$

dosadil do rovnice pro dV . Po úpravách dostal

$$dV = \frac{dV}{d \frac{dx}{dt}} (-Xdt) + \frac{dV}{d \frac{dy}{dt}} (-Ydt) + \frac{dV}{d \frac{dz}{dt}} (-Zdt).$$

Protože $dV = dk$, jde o diferenciální rovnici pro dk . V moderní notaci bychom našli $\frac{dV}{dt} = \frac{dk}{dt}$

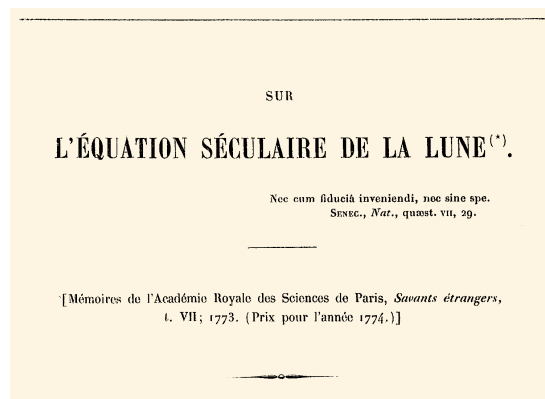
$$\begin{aligned} a \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \\ &+ \frac{\partial V}{\partial \frac{dx}{dt}} \frac{d \frac{dx}{dt}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \frac{dy}{dt}} \frac{d \frac{dy}{dt}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \frac{dz}{dt}} \frac{d \frac{dz}{dt}}{dt}. \end{aligned}$$

Vezměme do úvahy poruchové síly X, Y, Z v rovnicích (1). Hodnoty diferenciálů

$$d \frac{dx}{dt}, d \frac{dy}{dt}, d \frac{dz}{dt}$$

nyní jsou

$$-(\frac{Fx}{r^3} + X)dt, -(\frac{Fy}{r^3} + Y)dt, -(\frac{Fz}{r^3} + Z)dt.$$



Obr. 6 Titulní list Lagrangeova spisu *Sur l'équation séculaire de la Lune*. Mémoires de l'Académie royle des Science de Paris, anné 1773. Savants étrangers.

» Lagrange popsal poruchy jako následek vzájemného působení šesti tehdy známých planet. «

$$d \frac{1}{2a} = \frac{X dx + Y dy + Z dz}{F}$$

8. Voilà donc, comme l'on voit, une formule fort simple pour déterminer les altérations du grand axe $2a$ de l'orbite elliptique d'un corps animé par une force centrale $\frac{F}{r^2}$, et dérangé par des forces perturbatrices quelconques X, Y, Z .

Pour appliquer cette formule à la solution de la question qui fait l'objet de ce Mémoire, il est clair qu'il faut commencer par déterminer les forces

Obr. 7 Ukázka z Lagrangeova spisu *Sur l'altération des moyens mouvements des planètes*. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1776, s. 265.

Proto dV nebude již rovno nule, tudíž k není konstantní a platí

$$dk = - \left[\frac{\partial V}{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)} X + \frac{\partial V}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} Y + \frac{\partial V}{\partial \left(\frac{dz}{dt} \right)} Z \right] dt, \quad (3)$$

jak ukázal Lagrange. Z rovnice lze nalézt změnu dráhového parametru k .

Vztah pro vyjádření pohybu po eliptické dráze používaný Lagrangem měl tvar

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \alpha)},$$

kde p je *semilatus rectum*, e výstřednost elipsy, r rádius vektor, ϕ délka od pevné přímky a α úhel velké poloosy od této přímky, potom $\phi - \alpha$ je skutečná délka. Dále ze vztahů

$$r^2 d\phi = dt \sqrt{Fp} \text{ a } p = a(1 - e^2)$$

Lagrange postupně odvodil diferenciální rovnici určující změny velké poloosy

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{r} - \frac{r^2 d\phi^2 + dr^2}{2Fdt^2}.$$

Zjednodušil ji úpravami

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \text{ a } r^2 d\phi^2 + dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

a obdržel

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2Fdt^2},$$

což je tzv. rovnice energie, respektive živé síly pro eliptický pohyb. Levá strana rovnice je ztotožněná se členem k , pravá strana s V . Volbou $k = 1/2a$ získáme rovnici pro V , jak je podrobně diskutováno v [12], [13] či přehledově v [14].

Následně Lagrange vyjádřil zlomky obsahující derivace V :

$$\frac{dV}{d \frac{dx}{dt}} = - \frac{dx}{Fdt}, \quad \frac{dV}{d \frac{dy}{dt}} = - \frac{dy}{Fdt}, \quad \frac{dV}{d \frac{dz}{dt}} = - \frac{dz}{Fdt}.$$

Připomínáme, že platí

$$\frac{d \frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Po dosazení a úpravě derivací podle času t získal Lagrange klíčový vztah

$$d \frac{1}{2a} = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{F},$$

což komentoval v [11] slovy, viz obr. 7: „Vida, obdrželi jsme velmi jednoduchý vztah pro určování změn velké poloosy $2a$ eliptické dráhy tělesa podrobeného působení centrální síly F/r^2 a poruchových sil X, Y, Z .“ Změny velké poloosy $2a$ eliptické dráhy rušené planety jsou vyvolány gravitačním působením rušících planet.

Nadšený Laplace napsal v roce 1799 Lagrangeovi poděkování za zaslání citovaného spisu [11], v dopisu mimo jiné uvádí „... výstižná aplikace nádherné metody, kterou jste vysvětlil na začátku vašich memoárů“... „neobyčejně jednoduchý vztah obdrženy pro změnu velké poloosy“...

Výše rozebíraný Lagrangeův postup se lišil od předchozího z roku 1774 [15], ve kterém obdržel diferenciální rovnice pro dráhové elementy přímo, zatímco nyní začínal s řešením bezporuchového případu eliptické keplerovské dráhy, odkud odvodil již dříve zmiňované lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty. Vycházel tak v podstatě z původního Eulerova postupu, přičemž využil Laplacem zavedenou poruchovou funkci.

Metoda variace dráhových elementů byla dále Lagrangem rozvíjena ve spisech [16, 17, 18] (titulní list [16] viz obr. 8).

První část [16] obsahuje zdokonalenou algebraickou prezentaci řešení pohybových rovnic metodou variace dráhových elementů. Následně ve druhé části je provedena její aplikace na šest planet, přičemž soustavu Jupiteru a Saturnu zkoumal Lagrange samostatně. Řešení pro excentricity a sklony drah obou uvedených planet ukázalo na jejich oscilace v relativně malém intervalu.

Druhý protagonista problematiky – Laplace – se po delší pomlce znovu vrátil k problému vzájemných poruch planet v listopadu 1785 v přednášce pro Pařížskou akademii [19], v níž podal nástin nového přístupu k řešení.

Přelomovým mezníkem a dovršením analýzy vzájemného gravitačního působení Jupiteru a Saturnu se

THÉORIE DES VARIATIONS SÉCULAIRES

DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES.

PREMIÈRE PARTIE

CONTENANT LES PRINCIPES ET LES FORMULES GÉNÉRALES
POUR DÉTERMINER CES VARIATIONS.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1781.)

Obr. 8 Titulní list Lagrangeova spisu *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Première partie contenant les principes et les formules générales pour déterminer ces variations*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, 1781.

staly Laplaceovy spisy [20, 21]. V prvním z nich autor z integrálu živých sil, při zanedbání všech členů druhého a třetího řádu v hmotnostech m^2 a m^3 , které jsou buď periodické nebo konstantní, dospěl ke vztahu $m/a + m'/a' + m''/a'' + \dots = \text{konst.}_1$, kde $m, m', m'' \dots$ jsou hmotnosti planet, $a, a', a'' \dots$ velikosti velkých poloos jejich drah. Vzhledem k výrazně větším hmotnostem Jupiteru a Saturnu oproti ostatním planetám vztah zjednodušil na $m_J/a_J + m_S/a_S = \text{konst.}_2$. Z něho vyplynulo, že zmenšování velké poloosy Jupiterovy dráhy vede ke zvětšování velké poloosy dráhy Saturnu. Dále při vyjádření III. Keplerova zákona $a_J^{-1} = n_J^{-2/3}$ a $a_S^{-1} = n_S^{-2/3}$ dosazením obdržel $m_J n_J^{2/3} + m_S n_S^{2/3} = \text{konst.}_3$, kde n_J, n_S označují střední pohyby Jupiteru a Saturnu. Laplace prokázal, že vzájemná interakce obou planet ovlivňuje střední pohyb, což popsali vztahem

$$\delta n_S = -\frac{m_J}{m_S} \left(\frac{n_S}{n_J} \right)^{\frac{1}{3}} \delta n_J,$$

respektive

$$\delta n_S = -\frac{m_J}{m_S} \left(\frac{a_J}{a_S} \right)^{\frac{1}{2}} \delta n_J.$$

Použité hodnoty

$$m_J = \frac{1}{1067,2}, m_S = \frac{1}{3358,4},$$

$a_J = 5,20279$ AU, $a_S = 9,53877$ AU vedly po dosazení ke vztahu $\delta n_S = -2,3 \delta n_J$. Získal poměr decelerace Saturnu k akceleraci Jupiteru 7:3, viz věta na ukázce z textu spisu [19] na obr. 9. Tento poměr odpovídal z porovnání zjištěným historickým hodnotám.

Završující výklad nového přístupu podal Laplace ve svých přednáškách na Pařížské akademii v květnu a červnu roku 1786, ve kterých se věnoval detailům analýzy nepravidelností pohybu Jupiteru a Saturnu. Z propočtů vzájemného gravitačního působení obou planet a Slunce dokázal vyjádřit kvantitativně kinematické vlastnosti pohybu obou planet. Titulní list z přednášek vzniklého spisu [20] viz obr. 10.

Po matematické stránce oba protagonisté postupovali analogicky. Lagrange ve spisech [17, 18] používal při řešení soustav diferenciálních rovnic charakteristické rovnice příslušných matic složených z reálných čísel. Obdobně i u Laplacea ve spisu [21] kořeny charakteristických rovnic nejsou komplexní, nýbrž reálná čísla. Proto v matematických vyjádřeních nejsou složky závislé exponenciálně na čase. Excentricity a sklony planetárních drah tak oscilují kolem středních hodnot. Podrobnější rozbor používané matematiky obou je v [22].

Ve spisu [20] Laplace konstatuje: „Je tudíž velmi pravděpodobné, že pozorované změny v pohybech Ju-

THÉORIE DE JUPITER ET DE SATURNE.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1783: 1788.

Obr. 10 Titulní list Laplaceova spisu *Théorie de Jupiter et de Saturne*. Mémoires de l'Académie royale des Science, 1785.

piteru a Saturnu jsou výsledkem jejich vzájemných interakcí, a je prokázáno, že toto působení může vyvolávat nerovnosti, které buď nepřetržitě narůstají, nebo se vyznačují dlouhými periodami“ ... „je přirozené se domnívat, že existují teorie a velký počet nerovností tohoto typu, jejichž perioda je velmi dlouhá.“

Tedy pozorované zrychlení Jupiteru a zpomalení Saturnu jsou výsledkem poruch vyvolaných vzájemným působením obou planet. Laplace prokázal, že jde o dlouhoperiodické variace odpovědné za změny rychlosti středního pohybu, které vyjadřoval lineární aproximací. Periodu propočtl na přibližně 900 roků. Planetární dráhy podléhají dvěma pohybům, precesi perihélia (pomalá rotace dráhy v rovině) a precesi uzlové přímky (způsobující rotaci dráhové roviny v prostoru). Jejich výpočet u Laplacea tak byl složitější než v případě jednoduchých nehybných eliptických drah vyplývajících z Keplerových zákonů, které předpokládal ještě Newton.

Vývoj dráhových elementů planet Laplace vyjádřil prostřednictvím dvou vět, obsažených ve zmiňovaném pojednání [21]. Níže uvedené věty zachycující kinematické vlastnosti planet sluneční soustavy se staly důkazem stability sluneční soustavy. V didakticky upraveném znění je podle [23] lze formulovat následovně:

$$\sum_i m_i \sqrt{a_i} e_i^2 = \text{konst.}_4, \sum_i m_i \sqrt{a_i} i_i^2 = \text{konst.}_5.$$

Věty byly odvozeny za použití zákona zachování momentu hybnosti při předpokladu, že střední pohyby a tudíž i střední vzdálenosti planet od Slunce nejsou předmětem sekulárních změn. Laplace usoudil, že střední vzdálenosti (zastoupené velikostí velkých poloos) a_i , výstřednosti e_i a dráhové sklony i_i jsou podrobeny pouze omezeným periodickým změnám uvedených veličin kolem středních hodnot. Obsah vět se vztahoval k tehdy známým planetám, nikoliv jako obecné tvrzení o soustavě n těles.

Rozdílné numerické hodnoty zkoumaných dráhových elementů Jupiteru a Saturnu, získávané průběžně při výpočtech, byly nejvíce ovlivněny uvažovanými hmotnostmi obou planet. Lagrange zvolil pro poměr hmotností Saturnu a Slunce $1/3021$, zatímco Laplace $1/3521$, což je mnohem blíže nyní používané hodnotě $1/3498$. Laplacem dovršená teorie, důsledně vycházející ze zákona všeobecné gravitace, souhlasila s pozorovacími údaji obou planet v letech 240 př. n. l. až 1715 n. l. Ve druhé polovině 18. století nebyly Neptun a Pluto známy a dráhové elementy Uranu, jakož i hmotnosti Merkuru, Venuše a Marsu byly značně nepřesné. Proto z nynějšího pohledu mají kvantita-

» Neptun a Pluto nebyly v druhé polovině 18. století známy. «

52 MÉMOIRE SUR LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES

de Saturne est $\frac{1}{3358,40}$, on trouve que le retardement de Saturne doit être à l'accélération de Jupiter, à très peu près, comme 7 est à 3; ainsi l'équation séculaire de Saturne étant supposée de $9''16'$, celle de Jupiter doit être de $3''58'$, ce qui ne diffère que de 9 minutes du résultat de Halley. Il est donc fort probable que les variations observées dans les mouvements de Jupiter et de Saturne sont un effet de leur action mutuelle, et puisqu'il est constant que cette action ne peut y produire aucune inégalité, soit constamment croissante, soit pério-

Obr. 9 Ukázka z Laplaceova spisu *Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes*. Paris, 1784. s. 52.

» Lagrange a Laplace považujeme za architektu důkazu stability sluneční soustavy. «

tivní výsledky dosažené oběma význam především historický.

Závěrečný Laplaceův důkaz stability sluneční soustavy by nebyl možný bez předchozích postupných kroků předchůdců – Eulera a především Lagrangea –, jak bylo v článku ukázáno. Navzájem se oba hlavní autoři informovali a ovlivňovali, což dosvědčuje jak obsah jejich prací, tak i vzájemná korespondence, z níž můžeme podle [24] vybrat:

Lagrange píše Laplaceovi 10. dubna 1775: „*Co mne nejvíce zaujalo, byl výzkum sekulárních nerovností. Vzpomněl jsem si na svou starší práci o teorii Jupiteru a Saturnu, budu usilovat o její aplikaci na další planety. Zamyslím dále zaslat do spisů Akademie druhé pojednání o nerovnostech sekulárního pohybu afélie a excentricity planet, v kterých je problematika interpretována podobným způsobem.*“

Laplace píše Lagrangeovi 10. února 1783: ... „*jestliže předpokládáme dvě planety mající velmi podobný dráhový sklon, potom se na základě vzájemné interakce nemění...*“

Celkově shrnuto, oba lze považovat za architektu důkazu stability sluneční soustavy, a proto zpravidla hovoříme o Lagrangeově-Laplaceově teorii.

Definitivní historickou formulaci problému stability sluneční soustavy podal Laplace ve čtvrtém díle Nebeské mechaniky [25] z roku 1805. Odvodil poruchy místo v pravouhlých souřadnicích přirozeněji v poloměrech drah a délkách planet, přestože je pro ně poruchová funkce komplikovanější.

U nás obsah vět dokazujících stabilitu sluneční soustavy vyjádřil Seydler česky v [26]:

„*Neproměnnost velkých os (přibližně) eliptických drah není však jedinou nutnou zárukou pro stabilitu naší soustavy; také výstřednosti a sklony těchto drah nemohou se přes jisté meze měnit, nemají-li nastati poměry ohrožující další trvání alespoň některých částí soustavy té...*“

... „*Již Laplace uvádí následující dvě rovnice, z nichž jde najevo, že se mohou výstřednosti a sklony drah těch oběžnic, jichž hmota jest poněkud značnější, zkrátka hlavních oběžnic – a jen tyto oběžnice mají význam pro stabilitu naší soustavy – měnit jen v úzkých mezích a nabýti tudíž jen nepatrných hodnot maximalních, jinými slovy, že dráhy týchž oběžnic vždy budou elipsy od kružnic velmi málo rozdílné a k jakési pevné rovině v malém úhlu nakloněné.*“

$$\text{I. } m\sqrt{ae^2} + m'\sqrt{a'e'^2} + m''\sqrt{a''e''^2} + \dots = \text{const.}_1$$

$$\text{II. } m\sqrt{atg^2i} + m'\sqrt{a'tg^2i'} + m''\sqrt{a''tg^2i''} + \dots = \text{const.}_2$$

Literatura

- [1] V. Štefl: „K Newtonově a Eulerově interpretaci nerovnosti pohybu Saturnu a Jupiteru“, Čes. čas. fyz. **63**, 168 (2013).
- [2] Ch. Euler: „Meditationes in Quaestionem Utrum motus medius Planetarum semper maneat aequae velox, an successu temporis quampiam mutationem patiat? & quonam, sit ejus causa?“ Recueil des pieces dui out porte le prix de l'Académie royale des Sciences, 1771, s. 1–44.
- [3] J. A. Euler: „Mémoire dans lequel on examine si les planètes se meuvent dans un milieu dont la résistance produit quelque effet sensible sur leur mouvement“, Académie des Sciences, 1762, vol. 8.
- [4] J. L. Lagrange: *Mécanique analytique*. Courcier, Paris 1811.
- [5] P. S. Laplace: „Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, anné 1772, s. 325–366.
- [6] P. S. Laplace: *Traité de Mécanique Céleste*. Duprat, Paris 1799.
- [7] P. S. Laplace: „Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes dui en dépendent“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, anné 1773, s. 201–275.
- [8] Ch. C. Gillispie: *Pierre-Simon Laplace, 1749–1827: A life in exact science*. Princeton University Press, Princeton 1997.
- [9] J. L. Lagrange: „Sur l'équation séculaire de la Lune“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, anné 1773, s. 335–399.
- [10] P. S. Laplace: *Traité de Mécanique Céleste*. M. V. Courcier, Paris 1799.
- [11] J. L. Lagrange: „Sur l'altération des moyens mouvements des planètes“, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles – Lettres de Berlin, anné 1776, s. 255–271.
- [12] C. Wilson: „The great inequality of Jupiter and Saturn from Kepler to Laplace“, Arch. Hist. Exact Sci. **33**, 15 (1985).
- [13] J. Suzuki: *A History of the Stability Problem in Celestial Mechanics from Newton to Laplace*. Ph.D. thesis, Boston University, Boston 1996.
- [14] C. Wilson: „The work of Lagrange in celestial mechanics“, in: *Planetary Astronomy from the Renaissance to the Rise of Astrophysics*. Cambridge University Press, Cambridge 1995, s. 108–130.
- [15] J. L. Lagrange: „Sur le mouvement des noeuds des orbites planétaires“, Mémoires de l'Académie, Berlin 1774, s. 111–147.
- [16] J. L. Lagrange: „Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Première partie contenant les principes et les formules générales pour déterminer ces variations“, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1781, s. 125–207.
- [17] J. L. Lagrange: „Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Seconde partie contenant la détermination de ces variations pour chacune des planètes principales“, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1782, s. 211–344.
- [18] J. L. Lagrange: „Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Seconde partie contenant le calcul des variations indépendantes des excentricités et des inclinaisons pour chacune des six planètes principales“, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1784, s. 417–490.
- [19] P. S. Laplace: „Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1784, s. 49–92.
- [20] P. S. Laplace: „Théorie de Jupiter et de Saturne“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1785, s. 95–207.
- [21] P. S. Laplace: „Théorie de Jupiter et de Saturne“, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1786, s. 211–239.
- [22] J. Bečvář, J.: *Z historie lineární algebry*. Matfyzpress, Praha 2007.
- [23] C. M. Linton: *From Eudoxus to Einstein. A History of Mathematical Astronomy*. Cambridge, Cambridge University Press 2004.
- [24] J. Laskar: „Le Système solaire est-il stable?“, Séminaire Poincaré **XIV**, 221 (2010).
- [25] P. S. Laplace: *Traité de Mécanique Céleste*. Courcier, Paris 1805.
- [26] A. Seydler: „Historický rozvoj problému tří těles“, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **15**, 102 (1886).