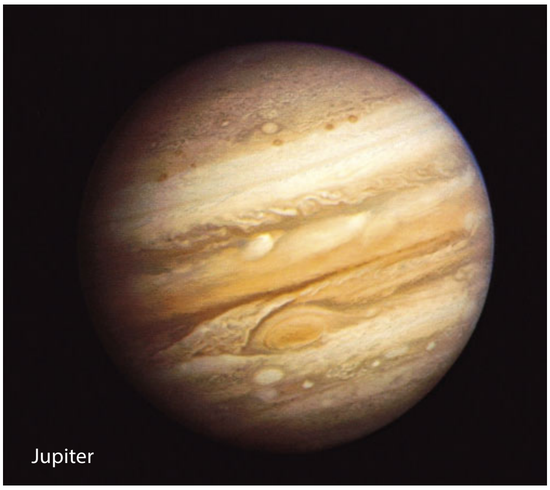
K Newtonově a Eulerově interpretaci nerovností pohybu Jupiteru a Saturnu

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky, Přírodovědecká fakulta MU, Kotlářská 2, 611 37 Brno

Objasnění nerovností pohybu Jupiteru a Saturnu a s tím spojené stability sluneční soustavy bylo jedním z nejdůležitějších problémů, které nebeská mechanika v historii řešila. Pokrok v jejím exaktním řešení nastal až po Newtonově objevu zákona všeobecné gravitace a následném rozvoji matematiky spojeném především se jmény Euler, Lagrange a Laplace. Postupně, v průběhu druhé poloviny 18. století, se podstatně snížil rozdíl mezi pozorovanými hodnotami poloh planet a jejich teoretickými propočty, založenými na řešení diferenciálních rovnic popisujících pohyb planet. Nebeská mechanika se tak stala významným stimulem rozvoje matematiky a spíše by se pro ni hodil název nebeská matematika.

Zásadní význam pro výklad stability sluneční soustavy měla interpretace pohybu planet s největší hmotností – Jupiteru a Saturnu. Přesná historická observační data zmiňovaných planet nezbytná k analýze jejich nerovností nebyla souvisle k dispozici po většinu času trvání civilizace na Zemi. Byla spíše koncentrována na určitá období, například ve 3. století př. n. l. na babylonskou astronomii, na dobu Ptolemaiova pozorování v první polovině 2. století n. l., na druhou polovinu 16. století spojenou s Tychonem Brahe (1546–1601) či na přesná pozorování prováděná od roku 1671 Johnem Flamsteedem (1646–1719) dalekohledem vybaveným záměrným křížem.


Jupiter

Již v antice bylo známo, že velikost v dnešní terminologii pěti siderických oběžných dob Jupiteru je velmi blízká hodnotě dvou siderických oběžných dob Saturnu. Písemně zachycené pozorovací údaje obou planet po provedené opravě na precesi uvedl Klaudios Ptolemaios (95–165) v Almagestu [1], kde propočítal střední denní hodnotu pohybu Jupiteru na n_J = 299,104 581“ a Saturnu n_{Sa} = 120,422 528“. Na základě novověkých astronomických pozorování v klíčovém období 18. století došlo k upřesnění hodnot středních denních pohybů pro Jupiter n_J = 299,128 361“ a Saturn n_{Sa} = 120,454 645“. Rozdíl novověkých a antických hodnot dosahuje u Jupiteru Δn_J = 0,023 78“ a Saturnu Δn_{Sa} = 0,032 12“. Pro v současnosti stanovené hodnoty je jejich podíl $n_J : n_{Sa} \approx$ 2,483 328 ≈ 5 : 2.

Střední roční pohyb Jupiteru činí 30,35°, Saturnu 12,22°, tudíž čas *t*, za který Jupiter opíše smyčku, je dán vztahem *30,35° t = 12, 22° t + 360°*, odtud *t = 19,86 roku.* Konjunkce obou planet proběhne přibližně každých necelých 20 roků, během nichž urazí Saturn podél ekliptiky průměrně úhel 242,70°.

Ze soudobé analýzy kinematických údajů o pohybu Jupiteru a Saturnu vyplývá, že maximální oběžná rychlost Jupiteru kolem Slunce je v periheliu zhruba o 5,0 % větší než jeho střední rychlost. U Saturnu je maximální oběžná rychlost v periheliu asi o 5,1 % větší než střední rychlost. V absolutních hodnotách se Jupiter vyznačuje střední oběžnou rychlostí 13,07 km.s^{-1}, rychlostí maximální 13,72 km.s^{-1} a minimální 12,44 km.s^{-1}. Saturn se pohybuje střední oběžnou rychlostí 9,69 km.s^{-1}, rychlost maximální je 10,18 km.s^{-1}, minimální 9,09 km.s^{-1}.

Vraťme se k historii. V roce 1625 Johann Kepler (1571–1630) po zpracování pozorování Johanna Regiomontanuse (1436–1476) a Bernarda Walthera (1430–1504) zjistil, že reálný pohyb Jupiteru a Saturnu neodpovídá úplně jeho teorii pohybu po eliptické dráze, viz podrobný rozbor jevu, např. v [2]. Připomínáme, že pozorované odchylky poloh planet na obloze od poloh odpovídajících eliptickému pohybu dosahují až 28´ u Jupiteru a 48´ u Saturnu. Poruchy jsou výraznější u Saturnu, neboť má přibližně 3krát menší hmotnost než Jupiter. Obr. 1 převzatý z [2] zachycuje rozdíl délek Jupiteru a Saturnu vypočítaný Keplerem v Rudolfinských tabulkách z roku 1627 podle Keplerových zákonů, s polohami stanovenými Regiomontanusem a Waltherem. Na grafu v obr. 1 je patrné zrychlování pohybu Jupiteru a zpomalování Saturnu.

Edmond Halley (1656–1742) roku 1695 potvrdil Keplerovy závěry o změnách rychlosti pohybu Jupiteru a Saturnu. Vypočítal sekulární zrychlení středního pohybu Jupiteru za 2 000 roků na +3°49,4′ a sekulární zpomalení středního pohybu Saturnu pro stejné období na −9°16,1′. Podle jeho výpočtů se poloměr dráhy Jupiteru zmenšoval a naopak poloměr dráhy Saturnu zvětšoval, což mohlo vést při narůstání těchto jevů k narušení stability sluneční soustavy. Halley na základě svých pozorování zpracoval planetární tabulky, které byly souhrnně vydány až po jeho smrti roku 1749.

Výklad nerovností pohybu Jupiteru a Saturnu začal promýšlet Isaac Newton (1643–1727) přibližně od roku 1684. V prosinci téhož roku v dopise Flamsteedovi doplnil popis pohybu Saturnu po eliptické dráze o myšlenku, že ohnisko jeho dráhy se nenachází ve středu Slunce, nýbrž v hmotném středu soustavy Slunce – Jupiter, což později uvedl v Principiích [3], viz text věty XIII. poučky XIII. v dalším odstavci.

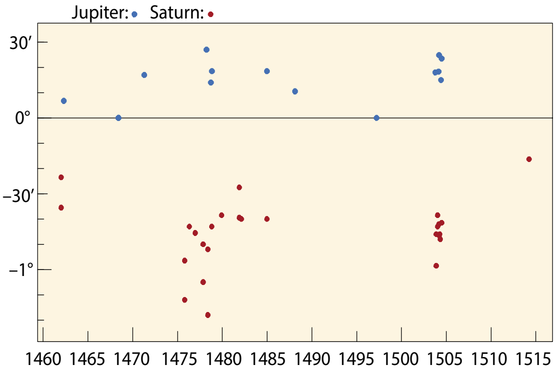
Výpočet gravitační interakce a poruch planet byl možný teprve po objevu zákona všeobecné gravitace a při znalosti poměru hmotností planet a Slunce. Pro stanovení tohoto poměru použil Newton u Země, Jupiteru a Saturnu velikosti oběžných dob a vzdálenosti tehdy známých měsíců planet prostřednictvím III. Keplerova zákona v přesném tvaru, jak je zachyceno v Principiích a stručně analyzováno např. v [4].

Ke vzájemnému působení planet se Newton vyjádřil v Principiích v I. knize, ve větě LXVI: … *„působení planet jedné na druhou, ačkoliv je velmi malé a může být zanedbáváno, ruší pohyb planet po elipsách“… „působení Jupiteru na Saturn nemůže být zanedbáváno“…* Zřetelně si tedy uvědomoval, že planety se ve svém pohybu ovlivňují.

Podrobnější rozvedení nalezneme ve III. knize Principií [3], větě XIII., poučce XIII. s názvem: **Planety se pohybují po elipsách, majících svoje ohnisko ve středu Slunce, rádius vektory vztahující se k tomuto středu opisují plochy úměrné času**. Text uvádí:

„O těchto pohybech bylo řečeno výše při zkoumání jevů. Ale následně, jestliže počáteční příčiny jevů jsou známy, můžeme odvodit pohyby kosmických těles bezprostředně. Protože přitažlivost planet ke Slunci je úměrná převrácené hodnotě kvadrátu vzdálenosti do středu Slunce, pak jestliže by se Slunce nacházelo v klidu a planety by na sebe vzájemně nepůsobily, byly by v tomto případě jejich dráhy eliptické, mající svoje ohnisko ve středu Slunce a opisovaly by plochy úměrné časům (viz I. kniha, poučka I a XI a následně poučka XIII). Působení planet jedné na druhou jsou velmi malá (takže je možné je zanedbat), i podle poučky LXVI z první knihy tyto interakce ruší méně eliptický pohyb planet kolem nehybného Slunce, nežli jestliže by tyto pohyby probíhaly kolem nehybného Slunce.

Avšak působení Jupiteru na Saturn nesmíme zanedbávat, protože přitažlivost k Jupiteru se má (při stejných vzdálenostech) k přitažlivosti Slunce jako 1 : 1 067, tudíž při konjunkcích Jupiteru a Saturnu, když je jeho vzdálenost k Jupiteru vzhledem ke vzdálenosti k Slunci jako 4 : 9,



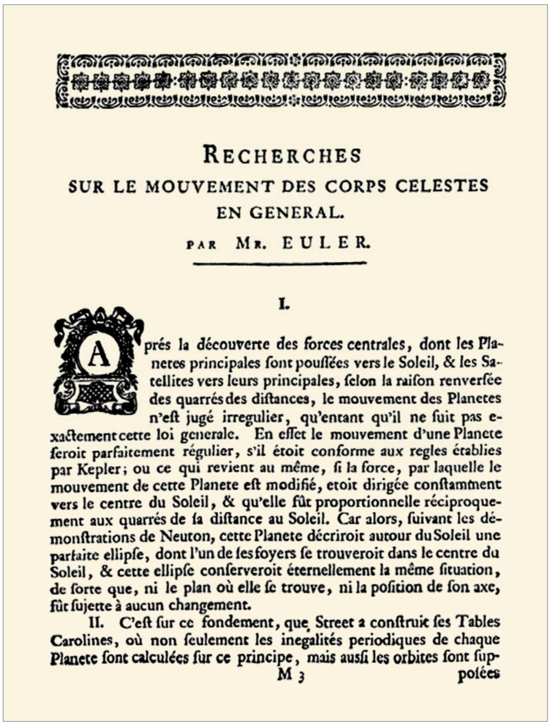
Obr. 1 Porovnání poloh Jupiteru a Saturnu v 15. století propočítaných podle Keplerových zákonů a skutečných pozorování.

*přitažlivost Saturnu k Jupiteru bude k jeho přitažlivosti ke Slunci jako 81 ku 16 × 1,067 nebo zaokrouhleně jako **1 ku 211. Porucha dráhy Saturnu při každé jeho konjunkci s Jupiterem je tak znatelná, že vyvolává bezradnost astronomů**. Při přihlédnutí k poloze planety při těchto konjunkcích se její výstřednost jednou zvyšuje, podruhé zmenšuje, afélium se jednou přesouvá vpřed, podruhé ustupuje vzad, střední pohyb jeden za druhým se jednou zrychluje podruhé zpomaluje. Avšak chyba v pohybu planety kolem Slunce, vycházející z této síly (kromě chyby středního pohybu) může být téměř celá vyloučena, jestliže umístíme vedlejší ohnisko dráhy do středu hmotnosti Jupiteru a Slunce a tehdy největší její velikost bude o málo převyšovat 2′. Chyba, neurčitost středního pohybu bude také nemnoho převyšovat 2′ za rok. V konjunkci Jupiteru a Saturnu urychlující síly přitažlivosti Slunce k Saturnu, Jupiteru k Saturnu a Jupiteru ke Slunci jsou v poměru téměř jako 16, 81 a $\frac{16.81.3021}{25}$, to je 156 609, proto rozdíl přitažlivostí Slunce k Saturnu a Jupiteru k Saturnu je v poměru k přitažlivosti Jupiteru k Saturnu jako 65 k 156 609., tj. jako **1 ku 2 409**. Tomuto rozdílu je úměrný největší poruchový vliv Saturnu na pohyb Jupiteru, proto i poruchy dráhy Jupiteru jsou mnohem menší než dráhy Saturnu. Poruchy drah ostatních planet jsou ještě mnohem menší výše zmiňovaným, kromě dráhy Země, podstatněji rušené Měsícem. Společný hmotný střed Země a Měsíce se pohybuje po elipse kolem Slunce, nacházející se v jeho ohnisku a opisující vedené k němu rádius vektory plochy, úměrné času. Země obíhá kolem tohoto hmotného středu měsíčním pohybem.“*

Newtonovu větu zvýrazněnou tučnou kurzívou lze interpretovat tak, že astronomové-pozorovatelé při hledání na obloze Saturnu v konjunkci s Jupiterem zjišťovali rozdílné polohy od tabulkových odvozených z Keplerovy teorie.

Z tvaru zákona všeobecné gravitace vyplývá, že vzájemné silové působení Jupiteru a Saturnu je největší při jejich nejmenší vzdálenosti v konjunkci. Gravitační interakci obou planet Newton věnoval dlouhodobou pozornost, o čemž svědčí opakovaný výpočet působících sil v soustavě Slunce – Jupiter – Saturn v jednotlivých vydáních Principií: Síla Jupiteru působící na Saturn je v konjunkci vzhledem k síle působení Slunce na Saturn v poměru 1 : 217 (I. vydání), 1 : 204 (II. vydání) a 1 : 211 (III. vydání). Důvodem odlišných hodnot uvedeného poměru sil bylo nepochybně zpřesňování poměru hmotností Jupiteru, Saturnu a Slunce. Výklad interakcí uvedených těles vedl Newton v Principiích geometricky, rozkladem poruchové síly na radiální a transradiální složku při vyjádření vztahu mezi nimi.

» Výklad nerovností pohybu Jupiteru a Saturnu začal Newton promýšlet asi v roce 1684. «



RECHERCHES
SUR LE MOUVEMENT DES CORPS CELESTES
EN GENERAL.
PAR MR. EULER.

I.

Aprés la découverte des forces centrales, dont les Planetes principales ſont pouſſées vers le Soleil, & les Satellites vers leurs principales, ſelon la raiſon renverſée des quarrés des diſtances, le mouvement des Planetes n'eſt jugé irregulier, qu'entant qu'il ne ſuit pas exactement cette loi generale. En effet le mouvement d'une Planete ſeroit parfaitement régulier, s'il étoit conforme aux regles établies par Kepler; ou ce qui revient au même, ſi la force, par laquelle le mouvement de cette Planete eſt modifié, etoit dirigée conſtamment vers le centre du Soleil, & qu'elle fût proportionnelle réciproquement aux quarrés de ſa diſtance au Soleil. Car alors, ſuivant les démonſtrations de Neuton, cette Planete décriroit autour du Soleil une parfaite ellipſe, dont l'un de ſes foyers ſe trouveroit dans le centre du Soleil, & cette ellipſe conſerveroit éternellement la même ſituation, de ſorte que, ni le plan où elle ſe trouve, ni la poſition de ſon axe, fût ſujette à aucun changement.

II. C'eſt ſur ce fondement, que Street a conſtruit ſes Tables Carolines, où non ſeulement les inegalités periodiques de chaque Planete ſont calculées ſur ce principe, mais auſſi les orbites ſont ſup-
M 3 poſées

Obr. 2 Titulní list Eulerova spisu *Recherches sur le mouvement des corps célestes en générale*. Mémoires de l´Académie des Science de Berlin 3 (1747).

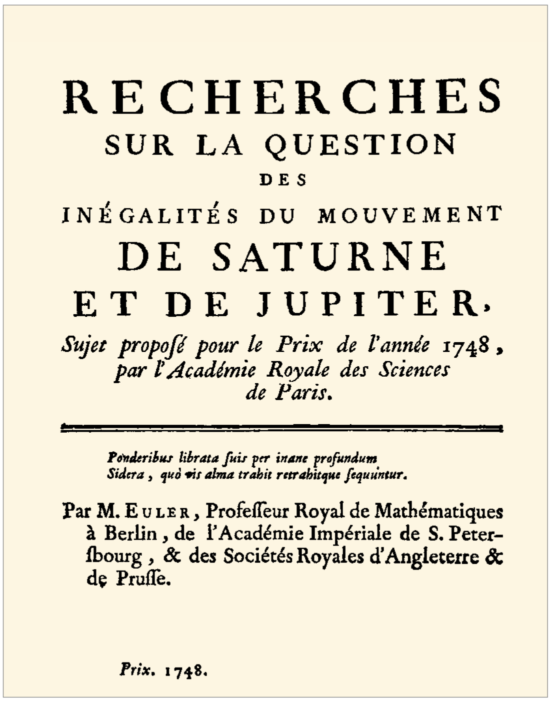
Provedeme rozbor kvalitativních a částečně kvantitativních úvah ve výše uvedeném textu Principií, přičemž budeme sledovat původní úroveň Newtonových úvah. Jaké jsou hodnoty působících zrychlení mezi sledovanými tělesy? Jejich obecný výpočet je složitý, analyzujme stejně jako Newton zjednodušenou situaci při Saturnu v opozici, tedy Slunce, Jupiter a Saturn ležící na jedné přímce. Jde o postavení zmiňované v Principiích, v němž je interakce obou planet zvláště výrazná. Výpočtem podle [5] při nyní známých poměrech hmotností $\frac{m_J}{m_{Sl}} = \frac{1}{1048}$ a $\frac{m_{Sa}}{m_{Sl}} = \frac{1}{3499}$ zjistíme, že Jupiter ve střední vzdálenosti od Slunce je přitahován Saturnem přibližně 2 400krát slaběji než Sluncem (Newton uvádí 2 409krát). Střední zrychlení Jupiteru po bezporuchové dráze kolem Slunce činí $2{,}2.10^{-4}\ m.s^{-2}$. Zrychlení Jupiteru vyvolané působením Saturnu a směřující k němu tudíž dosahuje $\frac{2{,}2.10^{-4}}{2400}\ m.s^{-2} = 9{,}1.10^{-8}\ m.s^{-2}$. Současně je Slunce přitahováno Saturnem a jeho zrychlení k planetě je přibližně $1{,}9.10^{-8}\ m.s^{-2}$. Rozdíl hodnot obou posledně uvedených zrychlení $7{,}2.10^{-8}\ m.s^{-2}$ představuje doplňkové zrychlení Jupiteru vzhledem k Slunci, tzv. poruchové zrychlení Jupiteru, které směřuje k Saturnu.

Saturn v opozici je přitahován Jupiterem přibližně 220krát slaběji než Sluncem (Newton uvádí 211krát). Střední zrychlení Saturnu po bezporuchové dráze kolem Slunce je $6{,}5.10^{-5}\ m.s^{-2}$. Zrychlení Saturnu vyvolané působením Jupiteru má tak hodnotu zhruba $\frac{6{,}5.10^{-5}}{220}\ m.s^{-2} = 3{,}0.10^{-7}\ m.s^{-2}$. Současně je Slunce přitahováno Jupiterem a jeho zrychlení k planetě je zhruba $2{,}1.10^{-7}\ m.s^{-2}$. Poruchové zrychlení Saturnu směřující k Jupiteru je součtem obou posledních, je rovno $5{,}1.10^{-7}\ m.s^{-2}$.

Přejděme ke kvalitativní interpretaci pozorovaných nerovností obou planet – změn rychlostí jejich pohybu. V průběhu konjunkce Saturnu s Jupiterem dochází k výměně jejich kinetických energií. Před ní Jupiterova gravitační přitažlivost zpomaluje Saturn (připomíná-me, že Jupiter pohybující se rychleji než Saturn ho „dohání"). Důsledkem je úbytek kinetické energie planetárního pohybu Saturnu vpřed. Tím přechází na nižší oběžnou dráhu, což vede ke zvýšení rychlosti středního pohybu. Po konjunkci nastává jev právě opačný. Je-li velikost gravitační interakce obou planet před konjunkcí obdobná jako po ní, měl by být výsledný efekt nulový. Úplně přesně však není, neboť dráhy obou planet nejsou koncentrické. Jestliže ke konjunkci dochází v takové poloze v prostoru, kde dráhy obou planet k sobě konvergují (jsou k sobě blízké) – v perihéliu Saturnovy dráhy a v aféliu Jupiterovy dráhy, je jev větší než před konjunkcí. Konečným výsledkem je zvětšování poloměru Saturnovy dráhy a zmenšování rychlosti jeho středního pohybu. Jestliže naopak konjunkce proběhne v poloze prostoru, kdy dráhy obou planet k sobě divergují, je konečným výsledkem pokles poloměru Saturnovy dráhy a zvýšení rychlosti jeho středního pohybu. Důsledkem jsou výsledná nepatrná zpomalení nebo zrychlení pohybu Saturnu, která nejsou rozeznatelná okamžitě, stávají se zřetelnými za větší časové okamžiky.

V historii 10. srpna 1691 Newton vyzval dopisem Flamsteeda ke shromažďování pozorovacích údajů o polohách Jupiteru a Saturnu v následujících čtyřech až pěti letech. Můžeme důvodně předpokládat, že je potřeboval k ověřování úvah o vzájemném působení obou planet. Flamsteed v prosinci roku 1694 poslal Newtonovi pozorované polohy Saturnu z let 1691–1694, včetně jejich rozdílů od poloh v Keplerových Rudolfínských tabulkách.

Myšlenky Newtona jako jeden z prvních rozvíjel Leonhard Euler (1703–1783), který metody řešení vzájemných poruch planet posunul z geometrických k analytickým. Přibližně do roku 1750 však byl váhavý v otázce definitivního uznání správnosti zákona všeobecné gravitace. Z počátku se spíše domníval, že všechny síly mají původ v neprostupnosti hmoty a jsou



RECHERCHES
SUR LA QUESTION
DES
INÉGALITÉS DU MOUVEMENT
DE SATURNE
ET DE JUPITER.
Sujet propoſé pour le Prix de l'année 1748, par l'Académie Royale des Sciences de Paris.

Ponderibus librata ſuis per inane profundum
Sidera, quò vis alma trahit retrahitque ſequuntur.

Par M. EULER, Profeſſeur Royal de Mathématiques à Berlin, de l'Académie Impériale de S. Peterſbourg, & des Sociétés Royales d'Angleterre & de Pruſſe.

Prix. 1748.

Obr. 3 Titulní list Eulerova spisu *Recherches sur la question des inégalites du mouvement de Saturne et de Jupiter.* Sujet propose pour le Prix de l´Anne 1748, par l´Academie royale des Science de Paris.

tak silami kontaktními. Až když Alexis Claud Clairaut (1713–1765) prokázal aplikací zákona všeobecné gravitace dobrý souhlas teoreticky vypočítané a pozorovací hodnoty posuvu perigea dráhy Měsíce v [6], Euler definitivně změnil názor, jak lze sledovat např. v [7] – titulní list spisu na obr. 2 a zřetelně v následných ukázkách ze spisu [8], jehož titulní list je na obr. 3.

Konkrétně v [8] píše, viz ukázka obr. 4: „*Teorie Saturnu a Jupiteru, která jediná může objasnit nerovnosti (pohybů) těchto dvou planet, se jeví způsobilá především v okamžicích jejich konjunkce.*“

I.

EXPLICATION DU SUJET.

§.I. L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris, propoſe pour ſujet du Prix de l'année prochaine 1748,

Une Theorie de Saturne & de Jupiter, par laquelle on puiſſe expliquer les inégalités que ces deux Planetes paroiſſent ſe cauſer mutuellement, principalement vers le tems de leur conjonction.

A ij

Obr. 4 Ukázka z Eulerova spisu *Recherches sur la question des inégalites du mouvement de Saturne et de Jupiter.* Sujet propose pour le Prix de l´Anne 1748, par l´Academie royale des Science de Paris. p. 3 – interakce Saturn – Jupiter.

Dále text v [8] uvádí, viz obr. 5: „*Navzdory mým výhradám k nepravidelnosti sil, které působí na Saturn, následuji v teoretických výzkumech přesně gravitační metody, která je nyní přijata ostatními astronomy; a předpokládám, že síly Slunce a planet klesají přesně v (převráceném) poměru čtverců vzdálenosti a působí na středy gravitace těles…*“.

troublées : & qu'il s'y trouve même des inégalités d'une autre eſpece, qui ſont preſqu'auſſi grandes que celles qui viennent de l'action de Saturne. Je crois que cette remarque eſt de la derniere importance dans l'Aſtronomie, puiſqu'elle nous donne à connoître que les forces que nous concevons dans le ciel, ne ſont pas les ſeules qni agiſſent ſur les Planetes, ou qu'elles ne ſuivent pas exactement la loi que nous leur adjugeons.

Obr. 5 Ukázka z Eulerova spisu *Recherches sur la question des inégalites du mouvement de Saturne et de Jupiter.* Sujet propose pour le Prix de l´Anne 1748, par l´Academie royale des Science de Paris. p. 8 – uplatnění gravitačního zákona.

Použil v [7] zákon všeobecné gravitace poprvé k výpočtům vzájemných poruch planet v soustavě Slunce – Jupiter – Saturn, jak je analyzováno a komentováno např. v [10, 11] a systematicky podrobněji v [12, 13]. Aplikoval na zmiňovanou soustavu II. Newtonův pohybový zákon v pravoúhlých souřadnicích ve tvaru

$$2\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{X}{m_{Sa}}, \qquad (1)$$

$$2\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{Y}{m_{Sa}}, \qquad (2)$$

$$2\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{Z}{m_{Sa}}, \qquad (3)$$

viz ukázka na obr. 6, kde m_{Sa} je hmotnost rušené planety – Saturnu, *X, Y, Z* jsou složky síly působící na Saturn ve směru souřadných os. Koeficient 2 vycházel z Eulerovy volby jednotek (zrychlení volného pádu na zemském povrchu položil za jednotkové pro vyjádření urychlujících sil, místo vztahu $v^2 = 2gh$ používal $v^2 = h$). Výše uvedené diferenciální rovnice druhého řádu jsou nyní používány standardně, avšak v první polovině osmnáctého století bylo jejich zavedení novátorské. Zjednodušeně lze uvést, že Euler definoval rovinu ***x y*** souhlasnou s oběžnou rovinou rušící planety – Jupiteru, souřadnice ***z*** zachycovala malé šířkové odchylky Saturnu od této roviny.

103

paralleles reſpectivement aux directions des trois coordonnées CP, PQ & QM. Que ces forces abſolues ou motrices ſoient

$$Mx = X;\ My = Y\ \&\ Mz = Z.$$

& poſant la maſſe du Corps = M, ces mêmes forces acceleratrices ſeront:

$$Mx = \frac{X}{M};\ My = \frac{Y}{M}\ \&\ Mz = \frac{Z}{M}.$$

Cela poſé, prenant l'element du tems *dt* pour conſtant, le changement inſtantané du mouvement du Corps ſera exprimé par ces trois équations:

$$\text{I. } \frac{2ddx}{dt^2}=\frac{X}{M};\ \text{II. } \frac{2ddy}{dt^2}=\frac{Y}{M};\ \text{III. } \frac{2ddz}{dt^2}=\frac{Z}{M}$$

d'où l'on pourra tirer pour chaque tems ecoulé *t* les valeurs *x*, *y*, *z*, & par conſéquent l'endroit où le Corps ſe trouvera. C. Q. F. T.

Obr. 6 Ukázka z Eulerova spisu *Recherches sur le mouvement des corps célèstes en générale*. Mémoires de l´Académie des Science de Berlin 3 (1747), p. 103 – pohybové rovnice.

Následně Euler transformoval první dvě rovnice do polárních souřadnic $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, příkladně $X/m_{Sa} \to (-P\cos\phi + Q\sin\phi)$ a $Y/m_{Sa} \to (-P\sin\phi - Q\cos\phi)$. Zavedl zrychlení *P*, *Q* a *R* orientovaná ve směru poklesu *r*, ϕ a *z*. Diferenciální rovnice získaly tvar

$$d^2r - rd\phi^2 = -P\frac{dt^2}{2},$$

$$2drd\phi + rd^2\phi = -Q\frac{dt^2}{2},$$

$$d^2z = -R\frac{dt^2}{2}.$$

Při řešení prvních dvou rovnic Euler použil III. Keplerův zákon, závislost mezi oběžnou dobou a velkou poloosou dráhy planet. Dále místo *P* a *Q* dosadil urychlující síly působící na Saturn ve vztažné soustavě spojené s nehybným Sluncem. Nejprve zjednodušeně předpokládal, že dráha Jupiteru je bezporuchová, zatímco Saturnu nikoliv. Později si uvědomil, že jestliže Jupiter ovlivňuje Saturn, musí také opačně Saturn působit na Jupiter. Proto dále postupně vycházel ze tří rozdílných předpokladů, ve kterých dráhy Jupiteru a Saturnu jsou brány jednak jako kružnice nebo jedna jako kruhová a druhá bezporuchová eliptická dráha. V každé hypotéze transformoval první dvě rovnice na diferenciální rovnice pro malé změny *r* a ϕ od jejich bezporuchových hodnot.

V Eulerových výpočtech pohybu Saturnu měl zásadní roli binomický rozvoj, jehož prostřednictvím se snažil vyjádřit iracionální člen v^{-3}, kde *v* je měnící se vzdálenost mezi Jupiterem a Saturnem. Závislost v^{-3} vyskytující se v diferenciálních rovnicích bylo potřebné vystihnout způsobem vhodným k integraci. Vzdálenost *v* zachytil pomocí středních vzdáleností Jupiteru *a*, respektive Saturnu *a´* od Slunce a kosinem rozdílu heliocentrických délek Jupiteru ϕ' a Saturnu ϕ: Změna *v* při pohybu Jupiteru od konjunkce se Saturnem do opozice je velikosti 3,418, tudíž v^{-3} se může měnit $(3{,}418)^3 = 39{,}932$. Platí $v^{-3} = [a^2 + a'^2 - 2aa'\cos(\phi'-\phi)]^{-\frac{3}{2}}$, což při substituci $\phi'-\phi = \theta$ upravil na $v^{-3} = [a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\theta]^{-\frac{3}{2}}$. Dále Euler podle [8] nejprve před-

» V Eulerových výpočtech pohybu Saturnu hrál klíčovou roli binomický rozvoj. «

pokládal, že a a a' jsou konstantní, tedy zanedbával excentricity drah, položil $\alpha = \frac{a}{a'}$ a získal po úpravách $v^{-3} = a'^{-3}(1+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}(1-g\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}$, kde $g = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$. Následně propočetl výraz $(1-g\cos\theta)^{-\frac{3}{2}}$ využitím binomického rozvoje při záporném zlomku v exponentu, viz obr. 7.

digreſſion au ſujet de la formule $(1 - g\, cof.\, \omega)^{-\frac{3}{2}}$, que j'envifagerai ſous une forme un peu plus générale, ſçavoir; $(1 - g\, cof.\, \omega)^{-\mu}$, dont la réſolution, ſuivant les regles ordinaires, eſt:

$$(1 - g\, cof.\, \omega)^{-\mu} = 1 + \frac{\mu}{1} g\, cof.\, \omega + \frac{\mu(\mu+1)}{1.\;2} g^2\, cof.\, \omega^2 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.\;2.\;3} g^3\, cof.\, \omega^3 + \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1.\;2.\;3.\;4} g^4\, cof\, \omega^4 + \&c.$$

Obr. 7 Ukázka z Eulerova spisu *Recherches sur la question des inégalites du mouvement de Saturne et de Jupiter.* Sujet propose pour le Prix de l´Anne 1748, par l´Academie royale des Science de Paris. p. 25 – binomický rozvoj.

Připomínáme, že první Newtonovo odvození binomického rozvoje z roku 1676 je zachyceno v [14], titulní list dopisu Newtona Henrymu Oldenburgovi (1619–1677) viz obr. 8.

7 On the Binomial Theorem for Fractional and Negative Exponents

By ISAAC NEWTON

LETTER OF JUNE 13, 1676 [1]

ALTHOUGH the modesty of Dr. Leibniz in the Excerpts which you recently sent me from his Letter, attributes much to my work in certain Speculations regarding *Infinite Series*,[2] rumor of which is already beginning to spread, I have no doubt that he has found not only a method of reducing any Quantities whatsoever into Series of this type, *as he himself asserts*, but also that he has found various Compendia, similar to ours if not even better.

Since, however, he may wish to know the discoveries that have been made in this direction by the English (I myself fell into this Speculation some years ago) and in order to satisfy his wishes to some degree at least, I have sent you certain of the points which have occurred to me.

Fractions may be reduced to Infinite Series by Division, and Radical Quantities may be so reduced by the Extraction of Roots. These Operations may be extended to Species [3] in the same way as that in which they apply to Decimal Numbers. These are the Foundations of the Reductions.

The Extractions of Roots are much shortened by the Theorem

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{4n}{}^{*}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

* Evidently a misprint for $3n$.

[1] *Commercium Epistolicum* (1712; 1725 edition, pp. 131–132).

[2] Probably as early as 1666, Newton had told Barrow and others of his work in infinite series in connection with the problem of finding the area under a curve, but this work was not published until 1704 when it appeared as an appendix to Newton's *Opticks*.

[3] That is "to algebraic numbers." In his *Arithmetica Universalis* (1707; 1728 edition) Newton says, "Computation is either perform'd by *Numbers*, as in Vulgar Arithmetick, or by *Species*, as usual among Algebraists . . ."

521

Obr. 8 Titulní list anglického překladu dopisu Newtona sekretáři Oldenburgovi z roku 1676.

Euler obdržel $(1-g\cos\theta)^{-\frac{3}{2}} =$

$$\left(1+\frac{3}{2}g\cos\theta+\frac{15}{8}g^2\cos^2\theta+\frac{105}{48}g^3\cos^3+\frac{945}{384}g^4\cos^4\ldots\right),$$

což při $g = 0{,}840\,4$ dávalo $1 + 1{,}260\,6 \cos\theta + 1{,}324 \cos^2\theta + 1{,}298 \cos^3\theta + 1{,}228 \cos^3\theta + \ldots$

Nově Eulerem zavedeným postupem při výpočtech v [8] bylo využití trigonometrických řad při aproximativním vyjadřování iracionálních funkcí, např. řady $A + B\cos\theta + C\cos 2\theta + D\cos 3\theta + E\cos 4\theta + F\cos 5\theta \ldots$, obr. 9.

§. XXV. Ayant fait ces ſubſtitutions, comme l'expreſſion devient trop compliquée, ſuppoſons qu'on trouve:

$$(1 - g\, cof.\, \omega)^{-\mu} = A + B\, cof.\, \omega + C\, cof.\, 2\omega + D\, cof.\, 3\omega + E\, cof.\, 4\omega + F\, cof.\, 5\omega + G\, cof.\, 6\omega + H\, cof.\, 7\omega + \&c.$$

& on parviendra aux valeurs ſuivantes des lettres *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c.

Obr. 9 Ukázka z Eulerova spisu *Recherches sur la question des inégalites du mouvement de Saturne et de Jupiter*. Sujet propose pour le Prix de l´Anne 1748, par l´Academie royale des Science de Paris. p. 26 – rozvoj binomické řady.

Ta konverguje velmi pomalu, proto se Euler při výpočtu v^{-3} omezil na prvních šest členů *A, B, C, D, E, F* a použil přitom úpravy

$$\cos\theta = \cos\theta$$

$$2\cos^2\theta = \cos 2\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2},$$

$$4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta$$

$$8\cos^4\theta = \cos 4\theta + 4\cos 2\theta + \frac{1}{2}\frac{4}{1}\frac{3}{2}$$

$$16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + \frac{5}{1}\frac{4}{2}\cos\theta$$

$$32\cos^6\theta = \cos 6\theta + 6\cos 4\theta + \frac{6}{1}\frac{5}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\frac{6}{1}\frac{5}{2}\frac{4}{3}$$

$$64\cos^7\theta = \cos 7\theta + 7\cos 5\theta + \frac{7}{1}\frac{6}{2}\cos 3\theta + \frac{7}{1}\frac{6}{2}\frac{5}{3}\cos\theta,$$

viz obr. 10.

Trigonométrie:

$$cof.\,\omega = cof.\,\omega$$

$$2\, cof.\,\omega^2 = cof.\, 2\omega + \tfrac{1}{1}.\,\tfrac{2}{1}$$

$$4\, cof.\,\omega^3 = cof.\, 3\omega + \tfrac{3}{1}\, cof.\,\omega$$

$$8\, cof.\,\omega^4 = cof.\, 4\omega + \tfrac{4}{1} cof.\, 2\omega + \frac{1}{2}.\frac{4.\;3}{1.\;2}$$

$$16\, cof.\,\omega^5 = cof.\, 5\omega + \tfrac{5}{1} cof.\, 3\omega + \frac{5.\;4}{1.\;2} cof.\,\omega$$

$$32\, cof.\,\omega^6 = cof.\, 6\omega + \tfrac{6}{1} cof.\, 4\omega + \frac{6.\;5}{1.\;2} cof.\, 2\omega + \frac{1}{2}.\frac{6.\;5.\;4}{1.\;2.\;3}$$

$$64\, cof.\,\omega^7 = cof.\, 7\omega + \tfrac{7}{1} cof.\, 5\omega + \frac{7.\;6}{1.\;2} cof.\, 3\omega + \frac{7.\;6.\;5}{1.\;2.\;3} cof.\,\omega$$

&c.

Obr. 10 Ukázka z Eulerova spisu *Recherches sur la question des inégalites du mouvement de Saturne et de Jupiter.* Sujet propose pour le Prix de l´Anne 1748, par l´Academie royale des Science de Paris. p. 25 – trigonometrická řada.

Koeficienty *C*, *D* atd… jsou funkcemi *A* a *B*, které lze vypočítat numerickou integrací. Posléze ve zdokonalené aproximaci Euler vzal v úvahu rovněž excentricity drah planet, při propočtu se však omezil pouze na druhé mocniny řad. Ve skutečnosti velká nerovnost Saturnu a Jupiteru vyžaduje vyjádření třetích mocnin.

$= \frac{2\lambda}{1+\lambda\lambda} = 0{,}8405$. Et ſuppoſant $(1 - g\, cof.\,\omega)^{-\frac{3}{2}} = A + B\, cof.\,\omega + C\, cof.\, 2\omega + D\, cof.\, 3\omega + E\, cof.\, 4\omega + F\, cof.\, 5\omega$ + &c. on trouvera par les méthodes indiquées ci-deſſus:

$A = 3{,}21789$, $B = 4{,}70357$; $C = 3{,}07731$; $D = 1{,}92413$; $E = 1{,}18601$; $F = 0{,}75144$, &c.

Obr. 11 Ukázka z Eulerova spisu *Recherches sur la question des inégalites du mouvement de Saturne et de Jupiter.* Sujet propose pour le Prix de l´Anne 1748, par l´Academie royale des Science de Paris. p. 37 – koeficienty rozvoje.

Porovnejme hodnoty koeficientů získaných Eulerem v [8], viz obr. 11, a později Laplacem v [15, 16].

	Euler 1748	Laplace 1785	Laplace 1802
A	3,217 89	3,162 76	3,220 27
B	4,703 57	4,703 19	4,707 31
C	3,077 31	3,073 36	3,076 84
D	1,924 13	1,911 91	1,914 66
E	1,186 01	1,156 46	1,158 67
F	0,751 44	0,686 69	0,688 69

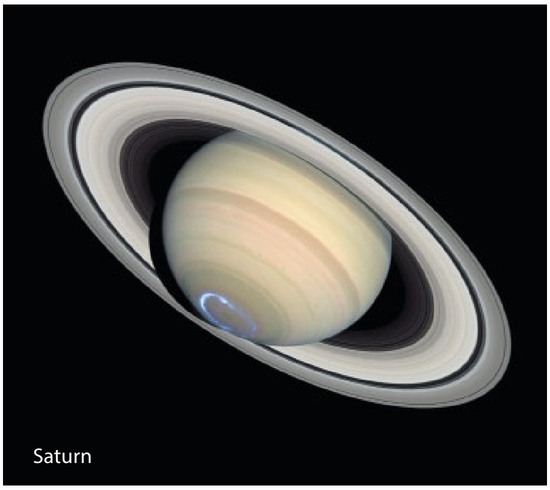
Rozdílné hodnoty jsou způsobeny odlišnými hodnotami α, poměru středních vzdáleností Jupiteru a Saturnu od Slunce. Vzdálenosti byly určovány prostřednictvím III. Keplerova zákona z oběžných dob uvedených planet.

Při výpočtech Euler používal následující hodnoty poměru hmotností planet a Slunce $\frac{m_J}{m_{Sl}} = \frac{1}{1067}$ a $\frac{m_{Sa}}{m_{Sl}} = \frac{1}{3021}$, pro srovnání uvádíme také současné hodnoty poměrů $\frac{m_J}{m_{Sl}} = \frac{1}{1048}$ a $\frac{m_{Sa}}{m_{Sl}} = \frac{1}{3499}$.

K pochopení historických souvislostí je třeba uvést, že výklad pohybu Saturnu se časově a věcně prolínal s řešením pohybu Měsíce, neboť jeho teorie v soustavě Slunce – Země – Měsíc je principiálně analogická s teorií Saturnu v soustavě Slunce – Jupiter – Saturn. Podstatně rozdílná je však prostorová geometrie situace, protože při rušení pohybu Měsíce Sluncem je vzdálenost Slunce – Měsíc výrazně větší než vzdálenost Země – Měsíc, poměr vzdáleností je 389:1, vzdálenost mezi rušícím tělesem – Sluncem – a rušeným – Měsícem – se příliš nemění. V případě pohybu Saturnu rušeného Jupiterem se vzdálenost mezi Saturnem a Jupiterem mění výrazněji. Poměr vzdáleností Slunce – Saturn ku Saturn – Jupiter se mění přibližně v intervalu (2,2–0,6), tedy zhruba 4krát. Další odlišnost je v hmotnosti uvažovaných těles. Zatímco při pohybu Měsíce je hmotnost rušícího tělesa – Slunce – mnohem větší než hmotnost hlavního tělesa – Země, u pohybu Saturnu má rušící těleso – Jupiter malou hmotnost ve srovnání s hlavním tělesem – Sluncem.

Při interpretaci pohybu Měsíce a výpočtů malých změn vzdálenosti Slunce – Měsíc hodnoty jednotlivých členů binomického rozvoje rychle klesají, řada konverguje, proto postačuje propočet prvních tří, respektive čtyř členů. V případě výkladu pohybu Saturnu změny vzdálenosti Jupiter – Saturn jsou velké, řada konverguje pomalu, proto je žádoucí výpočet několika desítek členů o přibližně stejné velikosti. Z výše zmiňovaných úvah je zřejmé, že kdyby se Měsíc nacházel ve větší vzdálenosti od Země, bylo by řešení jeho pohybu obtížnější.

V článku byly na vybraných ukázkách demonstrovány některé z hlavních Eulerových myšlenek a postupů, pomocí nichž v letech 1748–1752 rozpracoval metodu variace dráhových elementů. Její astronomická



Saturn

podstata spočívala v propočtech změn dráhových elementů planet, nikoliv odchylek v jejich poloze. Rovnici (3) pro výpočet malých šířkových odchylek Saturnu od dráhové roviny Jupiteru ve směru osy z Euler nahradil dvěma rovnicemi. Jednu pro sklon dráhy i a druhou pro výstupný uzel dráhy Ω. U bezporuchové eliptické dráhy jsou tyto veličiny konstantní, jejich proměnnost způsobují poruchy. Analýza aproximativního Eulerova vyjádření změn vyvolaných poruchami ukázala na malé změny sklonu dráhy – kolísání jeho hodnoty, zatímco uzel se pohyboval retrográdně v dráhové rovině rušených planet. Nalezl vztah $z = r \sin(\phi - \Omega) tgi$, kde r je velikost rádiusu vektoru Saturnu. Jednalo se o první analytické určení změn dráhových elementů. Při velmi pozvolných změnách i a Ω je Euler považoval za prakticky neproměnné, což vedlo k matematickému zjednodušení řešení. Vypočítané výsledky, které Euler obdržel, neodpovídaly úplně pozorovacím hodnotám poloh Saturnu, porovnání ukázalo nepřesnosti přesahující 8′ až 9′. Přesto i při omezení propočtu na několik prvních členů řad vyjadřujících změny dráhových elementů – excentricit, dráhových sklonů a délek perihélia – dospěl Euler k správnému závěru, že jejich poruchy jsou dlouhodobé.

Později Joseph Louis Lagrange (1736–1813) Eulerův postup zobecnil. Analyzoval variaci každého dráhového elementu individuálně, přičemž všechny ostatní pokládal v daném okamžiku za neproměnné. Pohybové rovnice zaměnil rovnicemi pro poruchy, které vyjádřil postupnými aproximacemi. Metoda vedla k jednodušším vztahům při výpočtech, avšak řešení poruch pohybu Jupiteru a Saturnu nebylo úplné. Potřebné bylo uvažovat vzájemnou simultánní změnu všech dráhových elementů současně, neboť pouze tak bylo možné propočítat polohy planet s dostatečnou přesností pro delší časové období.

Po matematické stránce Euler vycházel z výpočtů planetárních poruch vyjadřovaných přibližnými aproximativními funkcemi využívajícími použití trigonometrických řad, jak jsme v článku na vybraných příkladech ukázali. K řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic používal ve [8] metodu variaci konstant.

V českých zemích charakterizoval obsah Eulerovy metody August Seydler (1849–1891) roku 1886 v [17] takto: *„Vzhledem k nepatrnému vlivu rušivé síly můžeme po krátkou dobu považovati pohyb oběžnic za ryze eliptický, a můžeme po celou dobu tu příslušné jakési elementy podržeti; v následující taktéž velmi krátké* *době můžeme opět dráhu oběžnice považovati za elipsu, jejíž elementy jsme však poněkud byli pozměnili; v třetí částici takové budeme míti opět eliptickou dráhu s elementy znova změněnými, atd. V tomto pojímání pohybu tají se plodný princip variace konstant, jenž nám poskytuje mnohem jasnější obraz vlivu perturbací, nežli metoda předešlá. Dráha oběžnice jest dle něho elipsa, co do tvaru i co do polohy zvolna avšak stále se měnící, tak že můžeme po případě pro kratší dobu elementy dráhy považovati za konstanty (voliti pro ně např. hodnoty proměnlivých elementů na začátku, neb uprostřed, neb ke konci té doby) a pomocí nich vypočítati polohy oběžnic po trvání doby té. Perturbace netýkají se zde souřadnic samých, nýbrž elementů.“*

Literatura

[1] G. J. Toomer: *Ptolemy´s Almagest*. Princeton University Press, Princeton 1998.

[2] A. Giorgilli: *A Kepler´s Note on Secular Inequalities*. Milano 2011.

[3] I. B. Cohen: *The Principia – Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley-Los Angeles-London 1989.

[4] I. B. Cohen: „Newton´s determination of the masses and densities of the Sun, Jupiter, Saturn, and the Earth“, Arch. Hist. Exact Sci. 53, 83 (1998).

[5] J. A. Rjabov: *Dviženija něbesnych těl*. Nauka, Moskva 1988.

[6] A. C. Clairaut: *Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionelle (sic) aux quarrés des distances*. St. Petersbourg 1752.

[7] L. Euler: „Recherches sur le mouvement des corps céléstes en générale“, Mémoires de l´Académie des Science de Berlin 3, 93 (1747).

[8] L. Euler: „Recherches sur la question des inégalites du mouvement de Saturne et de Jupiter“, Sujet propose pour le Prix de l´Anne 1748, par l´Academie royale des Science de Paris, s. 1–123.

[9] L. Euler: „Recherches sur les Irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne“, Piéce dui a remporté le Prix propofé par l´Academie Royele des Science, pour l´anneé 1752, vol. VII., s. 1–84.

[10] C. Wilson: „The problem of perturbation analytically treated: Euler, Clairaut, d´Alembert“, in: *Planetary Astronomy from the Renaissance to the Rise of Astrophysics*. Cambridge University Press 1995, s. 89–107.

[11] C. Wilson: „Euler and applications of analytical mathematics to astronomy“, in: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*. Elsevier, Amsterdam 2007, s. 121–146.

[12] J. Suzuki: *A History of the Stability Problem in Celestial Mechanics from Newton to Laplace*. Ph.D. thesis, Boston University, Boston 1996.

[13] C. Wilson: „The great inequality of Jupiter and Saturn from Kepler to Laplace“, Archive for History of Exact Science 33, 15 (1985).

[14] I. Newton: „On the binomial theorem for fractional and negative exponents“, Letter of June 3 (1676), s. 521–528.

[15] P. S. Laplace: „Théorie de Jupiter et de Saturne“, Mémories de l´Academie royale des science de Paris (1785–88), s. 100–162.

[16] P. S. Laplace: *Traité dé Mécanique Céleste*. Paris 1802.

[17] A. Seydler: „Historický rozvoj problému tří těles“, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 15, 7 (1886).