Otázky nad energií

Jan Novotný, Přírodovědecká fakulta MU v Brně

Energie – snad nejpopulárnější slovo, které veřejnost převzala z fyzikálního slovníku. Mnohého "znalce" by však asi přivedly do rozpaků otázky: Co to vlastně je energie? Proč je tak univerzální a proč se zachovává? A když se zachovává, proč nás trápí její ztráty a vyčerpávání zdrojů? Řada otazníků nad pojmem energie se však může vynořit i v mysli fyzika. Následující text poukazuje na některé z nich, jak je vidí teoretický fyzik a relativista.

1 Ke kořenům pojmu

Slova ενέργεια užívá již Aristotelés ve své *Fyzice* [1], je tam však ještě vzdáleno současnému chápání. Naproti tomu otcové zakladatelé moderní fyziky – Galilei v *Dialogu* a Newton v *Principiích* – pojmu energie nevyužívají. V dnešním přesném významu se patrně energie ve fyzice nejdříve objevuje jako jeden z prvních integrálů rovnic nebeské mechaniky. Univerzálnost zákona jejího zachování však rozpoznalo až devatenácté století. Není patrně náhodou, že se o to zasloužili hlavně lidé širokého rozhledu a spektra zájmů, jako lékař Julius Robert Mayer či Hermann Helmholtz, který byl nejen fyzik, ale i přírodovědec a lékař. Ani devatenácté století však ještě nedovršilo syntézu myšlenek, na nichž se pojem energie zakládá. V očích teoretického fyzika má tuto zásluhu žena – německá matematička Emmy Noether. Ta spojila tři okruhy základních idejí: variační principy, jimiž se řídí fyzikální děje, principy symetrie, kterým je podřízen fyzikální svět, a zákony zachování jistých veličin. S každým parametrem spojité grupy transformací symetrie fyzikálních zákonů vyvozených z variačního principu je podle ní spojeno zachování jisté veličiny. Pro zachovávající se energii je příslušnou operací symetrie posunutí v čase. Lze tedy říci, že energie se zachovává díky tomu, že fyzikální zákony vyplývají z variačního principu a nemění se v čase. Známe-li veličinu, kterou fyzikální děj minimalizuje – akci, či Lagrangeovu funkci, jejímž časovým integrálem akce je – můžeme energii vypočítat, tj. určit její funkční závislost na základních proměnných daného fyzikálního systému a pro konkrétní fyzikální děj i její hodnotu [2], [3], [4].

2 Klasická mechanika

Nejprostší podoby nabývá tento výsledek v klasické mechanice [5], [6]. Nechť zobecněné souřadnice systému o konečném počtu stupňů volnosti jsou q_i , zobecněné rychlosti q'_i , kde čárka znamená derivaci podle času t. Pak je chování systému určováno Lagrangeovou funkcí $L(q_i , q'_i , t)$ na základě variačního principu stacionární (zpravidla nejmenší) akce

$$\delta \int L \, \mathrm{d}t = 0 , \qquad (1)$$

kde integrál se počítá přes časový úsek, na jehož hranicích jsou dány hodnoty zobecněných souřadnic. Z variačního principu vyplývají pohybové rovnice mechanického systému – Lagrangeovy rovnice

$$\partial L/\partial q_i - \mathrm{d} (\partial L/\partial q'_i)/\mathrm{d}t = 0 . \qquad (2)$$

Roli energie pak hraje veličina

$$E = \Sigma (\partial L/\partial q'_i) \, q'_i - L , \qquad (3)$$

kde v prvním členu na pravé straně sčítáme přes všechny souřadnice; nadále budeme důsledně používat Einsteinovy sumační symboliky, tj. v případě opakovaného indexu vynechávat sumu a automaticky předpokládat sčítání. Snadno se prověří, že veličina (3) se zachovává, tj. že platí

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0 \, ; \quad E = \mathrm{const} \, , \qquad (4)$$

jsou-li splněny Lagrangeovy rovnice (2) a Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, což znamená, že systém se nachází v časově neproměnných vnějších podmínkách (homogenita času, invariance Lagrangeovy funkce a tedy i pohybových rovnic vůči časovému posunu). K tomu dochází zejména v případě, že systém není podroben vnějším vlivům. Pokud takové vlivy existují a jsou časově proměnné, energie systému se sice mění, ale není to ovšem úplná energie. K totální zachovávající se energii dojdeme po rozšíření počtu proměnných o parametry všech systémů, které s naším systémem interagují, a doplnění Lagrangeovy funkce o členy odpovídající těmto systémům a jejich interakcím.

V běžné mechanice je Lagrangeova funkce rovna rozdílu kinetické a potenciální energie, shora popsaný formalismus to však nevyžaduje a může být použit i v složitějších případech (síly závislé na rychlostech, mechanika odpovídající Machovu principu).

To samozřejmě ví (nebo by aspoň měl vědět) každý student. Může v něm však vzniknout představa, že energie je něco obdobného elektrickému náboji či (předrelativsticky chápané) hmotnosti: jakási nezničitelná substance, která se přelévá z místa na místo a je určena nezávisle na vztažné soustavě či použitých souřadnicích. Přivede ho pak do rozpaků již tato prostá léčka: Uvažujme o kosmické sondě dostatečně vzdálené od všech dalších těles, abychom mohli zanedbat všechny její interakce s nimi. Lagrangeova funkce se pak omezuje na kinetickou energii a energie sondy je rovna její Lagrangeově funkci, která je ve zvolené inerciální soustavě rovna $mv^2/2$. Co když ale přejdeme k jiné inerciální soustavě?

Můžeme postupovat dvěma způsoby. Pro konkrétnost budu mluvit o "své" a o "bratrově" soustavě (můj bratr rád rychle jezdí autem). Trvám-li na své Lagrangeově funkci a přepíši ji pouze do bratrových souřadnic pomocí Galileiho transformace, dostanu užitím (3) jinou energii. Příslušná Galileiho transformace je příkladem kanonické transformace obsahující čas, taková transformace vede ke změně Hamiltonovy funkce, což je však právě energie. Skrytým pozadím je, že se změnou souřadnic jsem převzal i bratrovo pojetí časového posunu (v "prostoru," jehož souřadnicemi jsou čas t a zobecněné souřadnice q^i – matematik by mluvil o fibrované varietě, jejíž bází je čas, a o automorfismu této variety). Já i bratr stejně posouváme své hodiny, ale jinak body v prostoru – každý je ponechává "na místě" ze svého hlediska.

Přepíši-li si do svých souřadnic bratrovu Lagrangeovu funkci, dostanu podle (3) další, už třetí hodnotu energie. V tomto případě trvám na svém časovém posuvu, ale pozměnil jsem svou původní Lagrangeovu funkci o člen, který neovlivňuje Lagrangeovy rovnice (protože je totální derivací jisté funkce podle času). Čtvrtá hodnota energie se dostane z bratrovy Lagrangeovy funkce při jeho časovém posuvu.

Tato ze dvou kořenů vyrůstající "relativita" energie, v klasické mechanice sice snadno vysvětlitelná, ale přece jen na první pohled překvapivá, je skrytým původcem řady potíží s pojmem energie v teorii pole.

3 Teorie pole

Ve speciálně relativistických teoriích pole formulovaných v inerciální vztažné soustavě máme namísto času t čtyři prostoročasové souřadnice x^i (čas budeme považovat za "nultou" souřadnici, když volíme jednotky tak, aby rychlost světla byla rovna jedné), zobecněné souřadnice (například složky potenciálu elektromagnetického pole) označíme jako q^A a jejich derivace podle prostoročasových souřadnic x^i jako $q^A{}_{,i}$. V analogii k situaci v klasické mechanice postulujeme variační princip

$$\delta \int L \, \mathrm{d}\Omega = 0 , \qquad (5)$$

kde $L(q^A , q^A{}_{,i} , x^i)$ je Lagrangeova hustota (lagrangián), $d\Omega$ element čtyřrozměrného objemu a integrál se počítá přes čtyřrozměrnou oblast, na jejíž hranici jsou zadány hodnoty zobecněných souřadnic. Z variačního principu plynou rovnice pole

$$\partial L/\partial q^A - \mathrm{d} \, (\partial L/\partial q^A{}_{,i})/\mathrm{d}x^i = 0 \qquad (6)$$

(použitím symbolu d pro derivace ve druhém členu vyjadřujeme, že máme na mysli totální derivaci, při jejímž výpočtu počítáme s tím, že q^A a jejich derivace jsou funkcemi času). Lze odhadnout, že roli zobecněné energie nyní přebírá soubor 16 veličin $t_i{}^k$

$$t_i{}^k = (\partial L/\partial q^A{}_{,i}) \, q^A{}_{,i} - L \, \delta_i^k \qquad (7)$$

O nich se snadno dokáže, že za předpokladu platnosti rovnic pole (6) a nezávislosti lagrangiánu na prostoročasových souřadnicích (homogenita prostoročasu, nepřítomnost vnějších vlivů na systém) vedou k zákonům zachování

$$t_i{}^k{}_{,k} = 0 , \qquad (8)$$

kde index za čárkou znamená derivování podle příslušné souřadnice.

To jsou diferenciální zákony zachování, nahrazující první ze vztahů (4) z klasické mechaniky. Pokusme se názorně vysvětlit jejich význam. Představme si oblast prostoročasu jako je například posluchárna po dobu trvání přednášky. Tato oblast je ohraničena třírozměrným prostorem posluchárny na počátku a na konci přednášky a jejími stěnami (včetně podlahy a stropu) po celou dobu trvání přednášky. Předpokládejme, že během přednášky se v posluchárně nikdo nenarodil ani nezemřel, tj. platí v ní zákon zachování počtu lidských bytostí. Pak se počet přítomných na začátku a na konci přednášky může lišit jen o osoby, které během ní prošly stěnami (nejspíše po otevření dveří) dovnitř či ven. Pokud stěnami nikdo neprocházel, zůstal tento počet během přednášky konstantní. Podobně, zintegrujeme-li rovnice (8) přes čtyřrozměrnou oblast v prostoročase a užijeme Gaussovy věty, převedeme objemové integrály na plošné integrály přes shora popsanou hranici oblasti a tyto integrály jsou v důsledku (8) rovny nule. Předpokládejme, že jsou-li stěny dostatečně daleko od zkoumaného systému, přispívá jejich existence k uvažovaným integrálům jen zanedbatelně a v limitě pro nekonečně vzdálené stěny je takový příspěvek nulový. Vzhledem k opačné orientaci počátečního a koncového třírozměrného objemu (chápaného jako součást hranice) v čase to znamená, že se musejí rovnat a jsou tedy v čase konstantní integrály

$$P_i = \int t_i{}^0 \, \mathrm{d}V \qquad (9)$$

přes celý třírozměrný objem v libovolném časovém okamžiku.

Interpretace veličin $t_i^{\,k}$ pak probíhá takto: Srovnáním (3) s (7) a (9) zjišťujeme, že $t_0^{\,0}$ je hustota energie. Rovnice kontinuity (8) pro index $i = 0$ znamená, že $t_0^{\,\alpha}$ je hustota toku energie (řeckými indexy budeme označovat tři prostorové souřadnice). Integrál (9) pro index $i = 0$ má význam totální energie E. Energie je, jak víme z relativistických teorií, nultou komponentou čtyřvektoru energie-hybnosti, proto $-P_\alpha$ jsou komponenty totální třírozměrné hybnosti a $-t_\alpha^{\,0}$ jsou komponenty hustoty hybnosti. Vzhledem k rovnicím kontinuity (8) pro prostorové indexy i a porovnáním s klasickými rovnicemi mechaniky kontinua jsou konečně $t_\alpha^{\,\beta}$ komponenty tenzoru absolutních napětí neboli hustoty toku hybnosti. Veličiny $t_i^{\,k}$ tak v sobě shrnují základní mechanické charakteristiky, které lze přiřadit libovolnému poli. Mluvíme proto o tenzoru energie-hybnosti daného pole, popř. máme-li na mysli rozložení těchto veličin v prostoročase, o poli tenzoru energie-hybnosti.

Energie v relativistických teoriích pole je tedy veličina z matematického hlediska dosti složitá: její hustota je jednou z diagonálních komponent tenzorového pole druhého řádu a její celková hodnota je integrálem této veličiny přes třírozměrný prostor [3], [4].

4 Dva tenzory

Zdálo by se, že relativita energie je v relativistických teoriích pole elegantně vysvětlena – hustota energie se mění při Lorentzových transformacích podle transformačních vzorců pro komponenty tenzoru a celková energie podle transformačních vzorců pro komponenty čtyřvektoru. V druhém případě je tu však jisté úskalí. Lorentzova transformace mění nejen uvedené komponenty, ale také integrační oblast v (9), totiž hyperplochu současných událostí. Jen pokud nedochází k úniku přes třírozměrnou stěnu (dvojrozměrnou a v čase trvající stěnu obklopující systém) mezi oběma současnostmi, je pro ně úhrnný čtyřvektor energie-hybnosti týž.

I kdybychom to považovali za zaručené, zneškodnili bychom tak pouze jeden kořen relativity energie, ten, který souvisí s relativitou posuvu v čase. Relativita vzhledem k volbě lagrangiánu zůstane zachována, protože stále máme možnost přičítat k němu veličinu neovlivňující rovnice pole (v teoriích pole je to funkce "typu divergence" $V^{\,i}{}_{,i}$). Jsou tu však i další vady. Ilustrujme si je na příkladě standardního lagrangiánu elektromagnetického pole

$$L = C\, F^{\,ik} F_{ik}\,; \quad F_{ik} = A_{\,k,i} - A_{\,i,k} \qquad (10)$$

(za zobecněné souřadnice považujeme složky čtyřpotenciálu A_i, zvedání a spouštění indexů provádíme zde i v dalším známým způsobem pomocí Minkowskiho matic, C je konstanta závislá na volbě jednotek). Vypočtěme tenzor energie-hybnosti pomocí (7). Jak známo, čtyřpotenciál může být podroben kalibrační transformaci, když k němu přičteme čtyřrozměrný gradient funkce prostoročasových souřadnic. Tím se nezmění tenzor elektromagnetického pole F_{ik} a tedy ani lagrangián (10) – říkáme, že jsou kalibračně invariantní. Tenzor energie-impulzu $t_i^{\,k}$ však kalibračně invariantní není. Z něho vypočtená "hustota energie" tedy bude záviset na tom, jak zvolíme čtyřpotenciál. Navíc je tento tenzor nesymetrický, je tedy nesymetrický i tenzor absolutních napětí a hustota toku energie se nerovná toku hybnosti, ačkoliv hybnost je tok hmotnosti a ta by se (při jednotkové rychlosti světla) měla podle Einsteinova vztahu rovnat energii.

Proto se obvykle používá jiného tenzoru energie-hybnosti. Pro jeho výpočet nejdříve vyjádříme lagrangián explicitně jako funkci metriky, tj. ve variačním principu (5) integrujeme namísto L veličinu

$$\Lambda = \sqrt{(-g)}\, L = C \sqrt{(-g)}\, g_{ik}\, g_{ab}\, F^{\,ia} F^{\,kb}\,, \qquad (11)$$

kde g je determinant z komponent metrického tenzoru $g_{\,ik}$. V Minkowskiho souřadnicích v plochém prostoru jsou komponenty metriky rovny konstantní Minkowskiho matici a (11) přechází v (10).

Kalibračně invariantní a symetrický tenzor energie-hybnosti $T^{\,ik}$ pak definujeme jako

$$T^{\,ik} = (\,-2/\sqrt{-g}\,)\,[\,\partial\Lambda/\partial g_{ik} - \mathrm{d}(\,\partial\Lambda/\partial g_{ik,l})/\mathrm{d}x^l\,]\,. \qquad (12)$$

Tento tenzor má ještě další přednost. Výraz v hranaté závorce je vlastně výrazem typu (6) pro metrické koeficienty v úloze zobecněných souřadnic, tedy výrazu, který stojí na levé straně rovnic pole vyplývajících z variačního principu. Není proto ovlivněn doplněním lagrangiánu o člen, který nepřispívá k rovnicím pole. (Nezatajme však ani potenciální nevýhodu: kdyby Lagrangeova funkce závisela nejen na metrice, ale i na jejích prvních derivacích, obsahoval by tenzor (12) druhé derivace proměnných na rozdíl od tenzoru (7) obsahujícího pouze první derivace. V nejběžnějších případech jako (11) však k tomu nedochází.) Proč je ale T_i^{k} tenzorem energie-hybnosti?

Nejhlubší odpověď na tuto otázku podává opět paní Emmy Noether. Její první teorém, o němž jsme mluvili na začátku, udává podmínky pro existenci slabých zákonů zachování, které (jako (8)) platí pouze v důsledku splnění rovnic pole. Druhý teorém se vztahuje k obecně invariantním (také kovariantním či přirozeným) lagrangiánům, jejichž tvar se nemění libovolnou transformací prostoročasových souřadnic (a jí indukovanou transformací zobecněných souřadnic, jež jsou komponentami geometrických objektů). S těmito lagrangiány lze spojit zákony zachování, kterým se říká silné, protože si "stačí samy" a nevyžadují pro svou platnost splnění rovnic pole.

Zapsány v Minkowskiho souřadnicích a po vynechání členů, které jsou rovny nule v důsledku splnění rovnic pole, tyto zákony dávají

$$(t_i^{\ k} - T_i^k)_{,k} = U_i^{\ kl}{}_{,lk} = 0\,; \quad U_i^{\ kl} = -\,U_i^{\ lk}. \tag{13}$$

Identická povaha silných zákonů zachování je vyjádřená tím, že jsou odvozeny z veličin $U_i^{\ kl}$, kterým se říká superpotenciál. S druhým teorémem jsou spojeny ještě další identity, jedna z nichž za předpokladu splnění rovnic pole vede k zákonům zachování

$$T_{i\ ,k}^{k} = 0\,, \tag{14}$$

z (13) pak plyne

$$t_i^{\ k}{}_{,k} = T_{i\ ,k}^{k} = 0\,. \tag{15}$$

Nejenže tedy oba dva tenzory vedou k zákonům zachování, navíc i v případě, že nejde o úplný lagrangián a zákony zachování tedy pro ně neplatí, je dodržena aspoň rovnost jejich "divergencí" (15), která vystihuje změny energie a impulzu. Tenzor $t_i^{\ k}$ může tedy být "zastoupen" tenzorem T_i^k v diferenciálních zákonech zachování. Pokud však hodnoty zobecněných souřadnic – polních veličin – ubývají dostatečně rychle, může být zastoupen i při výpočtu totálních veličin. Rozdíl obou tenzorů je totiž podle (13) divergencí superpotenciálu. Při výpočtu integrálu tohoto rozdílu přes třírozměrnou oblast lze tedy opět užít Gaussovy věty a převést jej na plošný integrál přes hranici oblasti, kterou odsuneme do nekonečna. Ubývají-li komponenty superpotenciálu dostatečně rychle se vzdáleností od systému, je tento integrál roven nule a tedy pro čtyřvektor energie-hybnosti platí

$$P_i = \int t_i^{\ 0}\, dV = \int T_i^0\, dV\,. \tag{16}$$

Tenzoru $t_i^{\ k}$ získanému bezprostředně z teorému Emmy Noether se říká kanonický tenzor energie-hybnosti, zatímco tenzor T_i^k nazýváme metrickým či symetrickým tenzorem energie-hybnosti. Existence dvou obecně různých tenzorů energie-hybnosti je pozoruhodnou vlastností obecné lagrangeovské teorie pole [7], [8].

.

5 Tenzor či vektor?

Jak je tomu se zákony zachování v neinerciálních systémech? Přejít k neinerciálnímu systému znamená přepsat speciálně relativistické rovnice do křivočarých souřadnic. Tak ve vztahu (14) nahradíme obyčejné derivace kovariantními

$$T_{i\ ;k}^{k} = 0\,. \tag{17}$$

To ovšem není v křivočarých souřadnicích zákon zachování, protože po rozpisu kovariantní derivace se kromě obyčejné derivace objeví na levé straně i členy s Christoffelovými symboly. Nelze proto použít Gaussovy věty a obdržet integrální zákony zachování. Tato potíž nevzniká při přepisu divergence vektorového pole. Zde je Gaussova věta aplikovatelná, protože

$$\sqrt{(-g)}\, A^i{}_{;i} = (\sqrt{(-g)}\, A^i)_{,i.} \tag{18}$$

V křivočarých souřadnic je proto vhodné chápat (17) jako soubor čtyř vztahů typu

$$T^k{}_{;k} = 0\,; \quad T^k = T_i^k X^i\,, \tag{19}$$

kde X^i je konstantní jednotkové vektorové pole. Volíme-li za X^i postupně čtveřici polí ortonormální báze, která má v Minkowskiho souřadnicích s ní spojených komponenty

$$X^i{}_{(a)} = \delta_a^{\ i} \tag{20}$$

(index v závorce čísluje vektory báze), dostáváme z (19) opět (14), takže můžeme říci, že úloha posunů o libovolný násobek X^i je v zápise (14) "zamaskována." Energie (v dané vztažné soustavě) je spojena s polem časové povahy; můžeme tedy říci, že s každou inerciální vztažnou soustavou charakterizovanou tímto polem je spojen jí příslušný čtyřrozměrný tok energie $T^{\ k}$, který se zachovává. Zákon zachování energie se tak připodobňuje zákonu zachování pro např. pro čtyřrozměrný proud či pro čtyřrozměrný tok částic, jejichž počet zůstává zachován, s tím rozdílem, že tok energie je závislý na vztažném systému. V neinerciální vztažné soustavě hraje roli X^i vektorové pole tečné k parametrizovaným světočarám; pro příslušný tok pak už ovšem obecně neplatí slabý zákon zachování (19), protože chybí symetrie, která by mu odpovídala.

Je snadné najít podmínku, kterou musí X^i – generující pole, generátor či deskriptor – splňovat, aby zákon zachování platil. Provedením derivování v (19), užitím (17) a vzhledem k symetrii T^{ik} ji dostáváme ve tvaru

$$X_{i;k} + X_{k;i} = 0\ , \tag{21}$$

což jsou Killingovy rovnice, vyjadřující, že transformace prostoročasu spojená s daným generátorem je jeho izometrií, tj. zachovává metriku. S každou izometrií je tedy spojen zákon zachování, který v případě, že X^i je pole tečné ke světočarám vztažné soustavy, vyjadřuje zachování hmotné (tj. bez příspěvku gravitace) energie v této soustavě. I s takovýmito poli jsou však spojeny silné zákony zachování typu (13). Máme nyní dvě možnosti, jak je vyjádřit. Buď zamaskujeme úlohu přirozené báze spojené s danou vztažnou soustavou a jejími souřadnicemi, jejíž komponenty jsou dány vztahem (20). Pak dostaneme

$$[\sqrt{(-g)}\,(t_i^{\ k} - T_i^k)\,]_{,k} = U_i^{\ kl}{}_{,lk} = 0\ . \tag{22}$$

Nebo píšeme zákon zachování pro toky spojené s vektorovým polem

$$(\,t^{\,k} - T^{\,k})_{;k} = U^{\,kl}{}_{;l;k} = 0\ . \tag{23}$$

"Silná" povaha těchto zákonů je vyjádřena třííndexovým, resp. dvojindexovým superpotenciálem. Veličiny $t_i^{\ k}$ přecházejí v Minkowskiho souřadnicích v kanonický tenzor energie-impulzu, obecně je však jejich chování vůči transformacím velmi složité, což je dáno právě zamaskováním role generujících polí. Těmto veličinám můžeme říkat kanonický pseudotenzor energie-hybnosti (i když obvykle se názvu pseudotenzor užívá jen ve spojitosti s obecnou teorií relativity). Kanonický tok $t^{\,k}$ nelze na rozdíl od metrického toku vyjádřit jednoduchým vztahem (19), protože v něm vystupují i kovariantní derivace generujícího pole. Zůstává ovšem v platnosti, že kanonický pseudotenzor i kanonický tok mohou být zastoupeny mnohem jednoduššími metrickými veličinami [7].

6 A co gravitace?

Stoupající či klesající kyvadlo představuje jednu z nejstarších a nejbezprostřednějších ilustrací zákona zachování energie a její přeměny. V tomto případě hraje klíčovou roli gravitace. Je proto kuriózní, že diskuse o správné formulaci zákonů zachování v moderní teorii gravitace – obecné teorii relativity – se táhne celou její historií a nedospěla ani dnes k definitivnímu závěru [8], [9], [10], [11], [12], [13]. Nechceme zde rozebírat tento problém v celé šíři, ale pokusíme se ukázat jeho jádro.

V obecné teorii relativity i v některých alternativních teoriích je gravitační pole popsáno polem metrického tenzoru g_{ik} v zakřiveném prostoročase, v němž obecně nejsou žádné symetrie, přitom však rovnice gravitačního pole i dalších polí mají stejný tvar ve všech souřadnicových systémech. Můžeme proto s libovolným generujícím polem $X^i\ (x^k)$ spojit jednoparametrickou grupu symetrií prostoročasu. Neplatnost zákonů zachování pro veličiny spojené s "hmotou," o nichž jsme zatím mluvili, má nyní přirozené vysvětlení: k bilanci energie a hybnosti přispívá i gravitační pole. Toto pole má vlastní lagrangián, který závisí na metrických koeficientech a jejich derivacích. Silné zákony zachování (22), (23) se rozšíří na

$$[\sqrt{(-g)}\,({}_{\mathrm{M}}t_i^{\ k} + {}_{\mathrm{G}}t_i^{\ k} - {}_{\mathrm{M}}T_i^k - {}_{\mathrm{G}}T_i^k)\,]_{,k} = ({}_{\mathrm{M}}U_i^{\ kl} + {}_{\mathrm{G}}U_i^{\ kl})_{,l,k} = 0\ , \tag{24}$$

pracujeme-li s pseudotenzory, a na

$$({}_{\mathrm{M}}t^{\,k} + {}_{\mathrm{G}}t^{\,k} - {}_{\mathrm{M}}T^{\,k} - {}_{\mathrm{G}}T^{\,k})_{;k} = ({}_{\mathrm{M}}U^{\,kl} + {}_{\mathrm{G}}U^{\,kl})_{;l;k} = 0\ , \tag{25}$$

pracujeme-li s toky. Indexy M a G nalevo od symbolů odlišují hmotnou a gravitační část veličin vystupujících v zákonech zachování. Abychom dostali slabé zákony, použijeme rovnic gravitačního pole, které jsou tvořeny Lagrangeovými výrazy typu (6) vzhledem k proměnným gravitačního pole g_{ik}. (Pro přesnost je třeba dodat, že v teoriích gravitace často pracujeme s lagrangiány, které obsahují i druhé derivace metriky. Formule z předešlých odstavců je pak nutno doplnit dalšími členy, podstata věci však zůstává nezměněna.) Tyto rovnice jsou (srovnej (12)):

$${}_{\mathrm{M}}T_i^k + {}_{\mathrm{G}}T_i^k = 0\ . \tag{26}$$

V případě obecné teorie relativity jsou to známé Einsteinovy rovnice. Z těchto rovnic ihned plynou rovnice pro toky:

$${}_{M}T^{\,k} + {}_{\mathrm{G}}T^{\,k} = 0\ . \tag{27}$$

Po dosazení do (24), (25) a s využitím možnosti "zastoupení," která plyne z (13), dostáváme

$$[\sqrt{(-g)}\,({}_{\mathrm{G}}t_i^{\ k} + {}_{\mathrm{M}}T_i^k)\,]_{,k} = {}_{\mathrm{G}}U_i^{\ kl}{}_{,k,l} = 0 \tag{28}$$

v pseudotenzorové formulaci a

$$({}_G t^k + {}_M T^k)_{;k} = {}_G U^{kl}{}_{;l;k} = 0 \,. \qquad (29)$$

ve formulaci založené na tocích. Se vztahy (28), (29) se často setkáváme v literatuře bez indexů G a M, protože příslušnost k hmotě (včetně např. elektromagnetického pole) či gravitačnímu poli se rozumí sama sebou.

Překvapuje "hybridní" ráz veličin. Proč nevyužijeme možnosti nahradit kanonický pseudotenzor či kanonický tok metrickými výrazy i v případě gravitačního pole? Odpověď dávají rovnice (26), (27). Součet metrických zachovávajících se veličin je roven nule, takto chápaná energie či hybnost gravitačního pole se podle gravitačních rovnic ruší s energií a hybností ostatních polí v každém bodě prostoročasu. Zákony zachování se redukují na výrok 0 = 0. Chceme-li mít netriviální formulaci zákonů zachování, nemůžeme tedy provést důsledné zastoupení kanonických veličin metrickými.

Je zde ještě jedna důležitá okolnost. Pro gravitační pole mohou být kanonické veličiny zastoupeny metrickými jen v diferenciálním smyslu. Integrály z gravitačního superpotenciálu přes hranici obklopující ostrovní systém, na něž vede integrace (24), (25), nevymizí ani v nekonečnu. Úhrnná energie a hybnost systémů z gravitačním polem jsou tedy určeny právě takovýmito integrály, tedy na základě asymptotického chování systému.

Historicky vzato, byly s problémem zákonů zachování v obecné teorii relativity spojeny úvahy o "nelokalizovatelnosti" gravitační energie na rozdíl od energie jiného druhu (brzy po vzniku obecné relativity bylo ukázáno, že hustota gravitační energie v plochém prostoročase, počítaná z Einsteinova pseudotenzoru, který představuje nejstarší řešení problému, se stává nenulovou pouhým zavedením sférických souřadnic). Jak jsme viděli, nelokalizovatelnost je především důsledkem toho, že u gravitačního pole pracujeme s kanonickými veličinami namísto mnohem jednodušších a jednoznačnějších metrických. Pak se nutně projeví nejednoznačnost lagrangiánu. V obecné teorii relativity je svérázná situace, kdy invariantní lagrangián gravitačního pole

$$\Lambda = C\sqrt{(-g)}\, R \qquad (30)$$

(kde R je skalární křivost) obsahuje druhé derivace metriky, ty však mohou být "odečteny" neinvariantním způsobem bez narušení Einsteinových rovnic. Fakticky to znamená, že pro každou třídu souřadnicových soustav spojených lineárními transformacemi je lagrangián bez druhých derivací jiný. To je nejvýraznější zdroj "relativity" energie projevující se nelokalizovatelností. Může být odstraněn použitím invariantního lagrangiánu. Potom zůstává jen další zdroj spojený s libovolností generujícího pole X^i , tedy toho, co považujeme za časový posuv. Závislost kanonických veličin na tomto posuvu je mnohem složitější než u veličin metrických, nejde tu však o nějakou specifiku gravitačního pole. Mohlo by se proto zdát, že takové řešení, podané koncem padesátých let dvacátého století, založené v "tokové" formulaci na Komarově gravitačním superpotenciálu [14], [15]

$$U^{ik} = C\,(X^{i;k} - X^{k;i})\,, \qquad (31)$$

z něhož lze získat pseudotenzorovou formulaci dosazením přirozené báze (20), je tím nejlepším, čeho lze dosáhnout. Brzy se však ukázala paradoxní skutečnost. Zatímco Einsteinovy veličiny počítané z neinvariantního lagrangiánu se chovaly nevhodně z diferenciálního hlediska, ale dávaly pro ostrovní systém uspokojivý totální čtyřvektor energie -hybnosti [16], u invariantního lagrangiánu tomu bylo naopak: lepší "lokalizovatelnost" vedla k tomu, že čtyřhybnost se stala závislou na integrační nadploše, tedy na tom, co je chápáno jako současnost. Jinými slovy, nebylo možno přiřadit ostrovnímu systému čtyřvektor energie-hybnosti správně se chovající vůči Lorentzově transformaci, což odporuje požadavku korespondence mezi obecnou a speciální teorií relativity [11], [17].

Toto zjištění oslabilo naděje na řešení problému. Přesto se čas od času se děly další pokusy související zejména s rozšířením počtu proměnných v lagrangiánu (tetrády, složky konexe, repery. druhá metrika). Nezdá se však zatím, že by tyto snahy vedly k obecně uznávanému pokroku a zdá se, že ten spočívá v poslední době nikoliv v odstranění potíží, ale ve vyjasnění jejich původu. Smíme snad říci, že k tomu přispěla i práce brněnských a opavských matematiků a fyziků [18], [19].

Je půda lagrangeovských teorií pro řešení problému zákonů zachování v teoriích gravitace již vyčerpána? Mám-li vyslovit svůj názor, zdá se mi těžko představitelné, že by mohlo dojít ještě k podstatnějšímu objevu na poli matematiky. Možná si ale současné poznatky žádají ještě prohloubený výklad, který vyjeví jejich pravý smysl? Takový výklad by byl pravděpodobně spojen s pochopením toho, že v gravitačních a kosmologických souvislostech jsou přeměny a rozdíly energie důležitější než samotná její hodnota. Nové, hlubší pohledy na problematiku nabízí také hamiltonovská teooie, kterou jsme se zde již nemohli zabývat a která se rozvíjí zejména v posledních desetiletích.

Pokusili jsme se v tomto textu o panoramatický pohled na problematiku energie v rámci lagrangeovských teorií. Vrátíme-li se k úvodním otázkám, vidíme, že na některé jsme aspoň částečně odpověděli, té poslední, spadající do oblasti termodynamiky a nevratnosti jsme se však ani nestačili dotknout Mohli bychom sestoupit i na elementárnější úroveň a ptát se, jak souvisí lagrangeovské pojetí teorie s její školskou definicí jakožto "schopnosti konat práci." Ale mohli bychom se také ptát, co nového přináší k pochopení a prohloubení pojmu energie kvantová teorie a sjednocovací snahy. Snad se nám podařilo alespoň naznačit, jak i za běžným slovem a základním pojmem, které označuje, se skrývají hluboké problémy.

Poděkování: Děkuji magistře Janě Rybníčkové z katedry obecné fyziky Přírodovědecké fakulty MU v Brně za velkou ideovou, morální i technickou pomoc.

7 Literatura

[1] Aristotelés: Fyzika, Rezek, Praha 1996, s. 471
[2] Polak, L. S. (ed.): Variacionnye principy mechaniki, GIFML Moskva 1959
[3] Landau, L. D., Lifšic, E. M.: Teorija polja, Nauka, Moskva 1973
[4] Trautman, A.: Lectures on General Relativity, Vol. 1, Prentice Hall, London 1964
[5] Rubinowicz, W., Królikowski, W.: Mechanika teoretyczna, PWN, Warszawa 1967
[6] Horský, J., Novotný, J., Štefaník, M.: Mechanika ve fyzice, Academia, Praha 2001
[7] Novotný, J.: On the Conservation Laws in General Relativity, Proc. of Conference "Differential Geometry and Its Applications", J. E. Purkyně University, Brno 1984
[8] Mickevič, N. V.: Fizičeskije polja v obščej teorii otnositelnosti, Nauka, Moskva 1969
[9] Misner, Ch., Thorne, K., Wheeler, J. A.: Gravitacija, tom 2, Mir, Moskva 1977, s.143
[10] Babak, S. V., Griščuk, I. P.: Energy-momentum Tensor for the Gravitational Field, Phys. Rev D61, 1999
[11] Møller, Ch: Survey of Investigations on the Energy-mometum Complex in General Relativity, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 35, 3, 1966
[12] Horský, J., Novotný, J.: Conservation Laws in General Relativity, Czech. J. Phys. B19, 1969
[13] Rybníčková, J.: Zákon zachování energie v obecné teorii relativity – osmdesát pět let hledání, Čs. časopis pro fyziku 51, 2, 2001
[14] Komar, A.: Covariant Conservation Laws in the General Relativity, Phys. Rev. 113, 1959
[15] Novotný, J.: Identities Connected with the Second Theorem of E. Noether in Generally Invariant Gravitational Theories, Proc. of Conference "Differential Geometry and Its Applications", World Scientific, Singapore 1990
[16] Einstein, A.: Polnoje sobranije sočinenij, tom 1, Nauka, Moskva 1965, s. 626, 629, 650
[17] Novotný, J.: Møller Was Right, General Relativity and Gravitation, 19, 10, 1987
[18] Krupka, D.: A Theory of Generally Invariant Lagrangians for the Metric Field, Int. Journ. of Theor. Phys., 15, 1976; 17, 1978
[19] Novotný, J., Stolín, O.: A Generalized Approach to the Conservation Laws Problem in General Relativity, Proc. of Conference "Differential Geometry and Its Applications", Masaryk University, Brno 1996

Poznámka k literatuře: Literatura vztahující se k problémům zahrnutým v článku je bezbřehá a každý její jen poněkud reperezentativní soupis by zabral mnoho stran. Zde uvedený seznam proto zahrnuje několik základních monografií a přehledů, charakteristických článků autorů, kteří se danou oblastí nejvíce zabývali, a nejvýznamnějších prácí z okruhu brněnské relativistické skupiny.

Přednáška na konferenci „Nové trendy ve fyzice“ 15. 11. 2001 v Brně. Publikováno ve stejnojmenném sborníku Ústavu fyziky FEI VUT v Brně, 2001, s. 32